AVANT-PROPOS

Ce cours expose, à un niveau très élémentaire (du moins c'est mon souhait) les liens entre la mécanique statistique et la théorie des champs dans l'analyse des phénomènes critiques. C'est un des contextes où les idées de renormalisation et de groupe de renormalisation apparaissent de la façon la plus naturelle. Souvent en sciences, les idées les plus profondes et les plus intuitives sont difficiles à mettre en oeuvre, et il est parfois malaisé de bien sentir leur influence déterminante dans les travaux contenant les résultats qualitatifs. La théorie de la renormalisation ne fait pas exception à cette règle. Il subsiste, encore aujourd'hui à mon sens, un fossé entre les idées intuitives de Wilson et les méthodes quantitatives les plus performantes. Pour un exposé introductif, il m'a semblé nécessaire de laisser une large place à l'intuition physique. Je me suis cependant efforcé de présenter aussi les techniques de calcul. Ce double objectif est difficile à atteindre en temps limité, et ce sera aux étudiants de juger s'il a été atteint. Un expert du sujet trouverait sans doute beaucoup de défauts à l'exposé qui va suivre. Les résultats clairement établis côtoient sans avertissement des arguments très qualitatifs qui n'ont jamais pu être assis sur des bases parfaitement solides, les techniques de calcul sont introduites au fur et à mesure dans le corps de l'exposé, etc. J'espère au moins qu'il n'y a pas d'erreur conceptuelle flagrante.

Ce cours n'a pas, bien sûr, l'ambition de rivaliser avec les nombreux ouvrages excellents qui sont déjà sur le marché. Il s'en inspire librement et ne saurait donc pas prétendre non plus à l'originalité.

Le premier chapitre contient une brève introduction à la mécanique statistique et aux transitions de phase. Ensuite l'exemple des marches aléatoires discrètes, puis celui du modèle d'Ising à deux dimensions, servent à introduire la notion de limite continue et le lien entre mécanique statistique et théorie des champs.

Le second chapitre utilise les méthodes de théorie des champs pour étudier des généralisations du modèle d'Ising en dimension d. La formulation par des variables continues permet d'étudier les premières corrections au champ moyen. Le rôle de la dimension apparaît dans la structure de ces corrections. Pour montrer que des conclusions semblables subsistent non perturbativement, nous présentons un traitement élémentaire de la limite $n \to \infty$ du modèle $O(n)$.Nous dégageons aussi sous forme vague la notion d'universalité, puis le lien entre transition de phase et limite continue.

Le troisième chapitre est une introduction à la renormalisation des théories des champs dans le continu en s'appuyant en permanence sur l'idée d'un réseau de maille très petite sous-jacent. Il se termine par les équations du groupe de renormalisation.

Jean-Marc Luck et Jean-Bernard Zuber m'ont fait l'amitié de relire ces notes avec une patience, une indulgence et un soin dont c'est peu dire qu'ils m'ont étés utiles.

Ce cours a été conçu pour être enseigné au Maroc en avril 1992, à la faculté des sciences de Rabat. Il constitue la première partie d'un cours de théorie des champs. Gilbert Mahoux a accepté de prendre en charge la seconde partie, qui contient une introduction à des sujets plus avancés comme le développement en ε et des applications quantitatives aux phénomènes critiques. Ainsi la boucle est bouclée (expression parfaitement adaptée à la théorie de la renormalisation!).

Je ne peux refermer cet avant-propos sans remercier chaleureusement Edouard Brézin, Claude Itzykson et Jean Zinn-Justin. Ils m'ont appris tout ce que je sais en théorie des champs, et j'ai largement puisé dans leurs écrits pour obtenir le matériau de ce cours. J'ai mentionné mes emprunts les plus flagrants dans des notes bibliographiques succinctes. J'espère ne pas trop avoir trahi la qualité de leur enseignement.

Mes remerciements sincères vont aussi à Sylvie Zaffanella qui a assuré la frappe de ces notes avec diligence et bonne humeur.

I. TRANSITIONS DE PHASES ET LIMITE CONTINUE

A. INTRODUCTION

Les changements d'états de la matière nous sont très familiers : passage du solide au liquide, du liquide à la vapeur, etc. Dans les conditions habituelles de température et de pression ces transitions ne sont pas continues. Par exemple l'eau et la vapeur d'eau n'ont pas la même densité, et il y a une chaleur latente de transition. Il faut fournir de la chaleur au système pour que la transition se fasse, et durant la transition, cette chaleur ne sert pas à augmenter la température mais uniquement à faire passer de l'état liquide à l'état vapeur. Augmentons maintenant la pression. Nous savons que dans le même temps la température de transition augmente, mais il subsiste un palier en température lors du changement d'état. Lorsque la pression atteind 218 fois la pression ambiante un phénomène nouveau se produit : le palier en température disparaît. Lorsque la température approche 647°K, des fluctuations de grande échelle se manifestent dans le liquide, provoquant le phénomène d'opalescence critique : la lumière est fortement diffusée. A 647°K la chaleur latente s'annule, et on passe continûment de l'état liquide à l'état vapeur. Le diagramme de phases est le suivant :

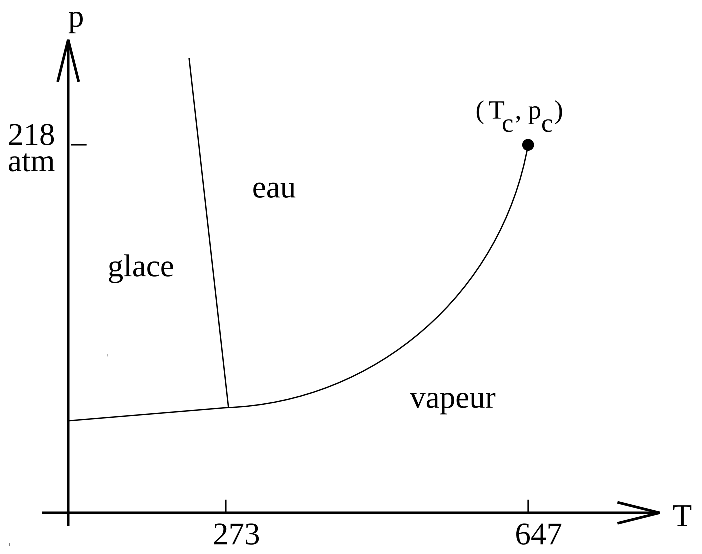


Diagramme de phases de l'eau.

Les quantités T_c et p_c s'appellent la température et la pression critique, et le point (T_c, p_c) dans le diagramme de phases, le point critique. Au point critique la distinction entre liquide et vapeur disparaît, leurs densités s'égalisent.

Un autre exemple apparaît dans l'étude des matériaux ferromagnétiques. Lorsqu'on refroidit du fer en champ magnétique nul, on observe le phénomène suivant. Au dessus de 1044°K, il n'y a pas d'aimantation spontanée. Mais au dessous de cette température, le morceau de fer devient aimanté. Ceci se passe de façon continue. En dessous mais près de 1044°K l'aimantation est faible. L'orientation de l'aimantation peut varier dans le matériau, mais si l'on introduit un champ magnétique faible, l'aimantation spontanée a tendance à s'aligner avec lui. On observe le diagramme de phases suivant :

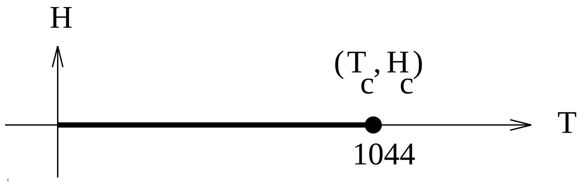


Diagramme de phases du fer.

L'analogie avec l'exemple précédent est la suivante. Imaginons une expérience où le système eau-vapeur décrit la courbe de transition dans le plan (T, p). Certaines parties du système sont à l'état liquide et coexistent avec les parties du système qui sont à l'état de vapeur. On distingue ces états par leurs densités différentes. Lorsqu'on approche de (T_c, p_c), la différence de densité s'annule continûment. Si on s'écarte de la ligne de transition à température constante en changeant un peu la pression le système passe complètement dans l'un des deux états. Ainsi la différence de densité joue un rôle analogue à l'aimantation, et la pression un rôle analogue au champ magnétique. La quantité physique qui indique l'état macroscopique du système en dessous du point critique s'appelle un paramètre d'ordre. Dans le cas de l'eau c'est la différence de densité, qui est un scalaire. Dans le cas du fer c'est l'aimantation, qui est un vecteur.

Notons qu'au point critique se produit une brisure de symétrie : en dessous de la température critique le système a plusieurs états accessibles, il cesse d'être homogène.

L'étude du voisinage du point critique et les raisons pour lesquelles cette étude amène à la théorie de champs font l'objet de ce cours introductif.

Il a fallu de très nombreuses années pour arriver à une compréhension qualitative et quantitative des phénomènes critiques. Cette compréhension est un des grands succès de la physique moderne, et a eu un retentissement important sur d'autres domaines qui semblaient totalement indépendants. En 1937, Landau proposait une théorie macroscopique des transitions de phase continues (dites aussi du second ordre). Cette théorie était très simple (mais très astucieuse). Elle classait les transitions suivant la symétrie des paramètres d'ordre. Par exemple toutes les transitions dont le paramètre d'ordre est vectoriel ont génériquement le même comportement critique dans une transition du second ordre dans la théorie de Landau. Nous verrons dans la suite de ce cours la théorie de Landau émerger de considérations microscopiques à partir de l'approximation dite du champ moyen. Un an plutôt (1936) Peierls avait mis fin à un débat important en montrant que les lois fondamentales de la mécanique statistique pouvaient suffire à prédire des transitions de phase. Son argument était rigoureux mais ne donnait pas de résultats quantitatifs. Il montrait que dans un modèle très simple (le modèle d'Ising à deux dimensions, sur lequel nous reviendrons plus loin) de ferromagnétisme, il y a une température au delà de laquelle il n'y a pas d'aimantation spontanée, et une autre température en deçà de laquelle il y en a une. Son argument ne prouvait pas que la transition était continue. Des inégalités de corrélation permettent facilement d'étendre le résultat de Peierls à des modèles plus compliqués et aux dimensions supérieures à deux. En 1944, Onsager réussissait à calculer exactement la fonction de partition du modèle d'Ising. Il prouvait que la transition était bien continue, mais aussi que les prédictions quantitatives de la théorie de Landau étaient incorrectes pour ce modèle. Il fallut beaucoup de temps pour obtenir des résultats expérimentaux assez précis pour se rendre compte que la théorie de Landau éait aussi incorrecte en dimension trois et pour se convaincre que les phénomènes critiques devaient dépendre de la dimension. Ce sont finalement les idées de Kadanoff et Wilson sur l'invariance d'échelle, l'élimination des fluctuations de petite longueur d'onde et l'utilisation de la renormalisation dans les années 60 à

70 qui ont permis d'attaquer vraiment avec succès le problème des transitions de phase. Il a encore fallu quelques années pour mettre au point des techniques efficaces pour les calculs quantitatifs grâce au développement en ε. Dans les années 80, les transitions de phases à deux dimensions sont revenues au premier plan pour diverses raisons, mais çà c'est une autre histoire.

1) Le modèle d'Ising

Le problème pour la mécanique statistique est de trouver des modélisations (par exemple des matériaux ferromagnétiques) suffisamment simples pour que certaines quantités soient calculables, mais suffisamment riches pour que la physique intéressante ne soit pas purement et simplement ignorée. On sait que des moments magnétiques microscopiques dus aux spins sont responsables du ferromagnétisme. A cause du principe de Pauli, il y a une interaction d'échange entre spins. Dans les matériaux ferromagnétiques cette interaction favorise l'alignement des spins voisins. On peut se convaincre que cette interaction est l'effet dominant. L'énergie liée aux interactions de spins contient donc un terme du type

$$\sum_{\langle i,j\rangle} -J\ \vec{S}_i \vec{S}_j$$

où la notation $\langle i,j\rangle$ désigne les paires de proches voisins. Il peut y avoir des interactions entre spins plus éloignés mais elles sont très vite négligeables. De plus, bien que l'interaction soit d'origine purement quantique, les températures de transitions relativement élevées (de l'ordre de 1000K) permettent de négliger les effets quantiques. On arrive donc à un modèle où $\vec{S}$ est simplement un vecteur de longueur fixée qu'on peut prendre égale à 1 en changeant J. Enfin on peut imaginer des cas très anisotropes où en fait le spin $\vec{S}$ a forcément une direction donnée dans l'espace et ne peut prendre que la valeur $+1$ ou -1 suivant cette direction. Alors on obtient le modèle suivant. Les spins S_i sont aux noeuds d'un réseau (tridimensionnel dans le cas physique) représentant le cristal (on néglige toutes les excitations de type phonons). L'énergie d'une configuration $\mathcal{C}$ de spins est

$$E(\mathcal{C}) = -J \sum_{\langle i,j\rangle} S_i S_j$$

et la fonction de partition est

$$Z(\beta, J) = \sum_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-\beta E(\mathcal{C})}\ .$$

Si le spin i est soumis au champ magnétique H_i on ajoute à E un terme $-\sum_i H_i S_i$.

Ceci définit le modèle d'Ising. Bien sûr on peut formuler de façon analogue le cas où $\vec{S}$ est un vrai vecteur sans direction priviligiée. La sommation sur $S = \pm 1$ est alors remplacée par une intégrale sur la sphère unité dans l'évaluation de Z. Les techniques mises en oeuvre dans ce cours s'appliquent à ce cas plus général (voir au chapitre II la discussion du modèle $O(n)$) mais nous nous restreindrons la plupart du temps au cas le plus simple (le modèle d'Ising) dans la suite.

2) Comment détecter une transition de phase ?

Les matériaux physiques contiennent un nombre fini d'atomes et on peut donc commencer par étudier le modèle d'Ising sur une portion finie d'un réseau. Dans ce cas

$$Z(\beta, J, H) = \sum_{\mathcal{C}} \exp\left(\beta J \sum_{\langle i,j\rangle} S_i S_j + \beta H \sum S_i\right)$$

est une somme finie de fonctions analytiques en β, J, H, et c'est donc une fonction analytique de ces paramètres. Lorsque $H = 0$, l'énergie est invariante quand on retourne tous les spins. En conséquence

$$\langle S_k \rangle_{H=0} \equiv \frac{1}{Z(\beta, J, 0)} \sum_{\mathcal{C}} S_k \ \mathrm{e}^{-\beta E(\mathcal{C})} = 0$$

et ceci implique que

$$\lim_{H \longrightarrow 0} \langle S_k \rangle_H \equiv \frac{1}{Z(\beta, J, H)} \sum_{\mathcal{C}} S_k \exp \left(\beta J \sum_{\langle i,j \rangle} S_i S_j + \beta H \sum S_i \right) = 0 \ .$$

Mais $\langle S_k \rangle$ est l'aimantation moyenne du spin k. C'est donc le paramètre d'ordre local M_k. Ainsi notre modèle ne semble pas compatible avec l'apparition d'une aimantation spontanée, et d'une tendance à l'alignement même avec un champ magnétique très faible. En fait le phénomène est le suivant. Plus le nombre de spins est grand et plus l'aimantation se met à varier brutalement (tout en restant analytique) au voisinage d'une certaine température à champ magnétique petit fixé. Qualitativement à température et champ magnétique fixé, si on augmente la taille de l'échantillon, l'aimantation augmente. Mais pour un échantillon macroscopique avec un champ magnétique résiduel (de l'ordre du champ magnétique terrestre) la courbe d'aimantation se confond presque parfaitement avec la courbe d'aimantation du système infini à champ magnétique nul, et la différence est bien plus petite que les erreurs expérimentales. Donc même si en toute rigueur, il n'y a pas d'aimantation spontanée pour un système fini, l'expérience peut mettre en évidence une transition.

Les courbes d'aimantation, ou tout au moins leurs singularités au voisinage du point critique dans la limite du système infini, font partie de ce que nous aimerions calculer.

3) Pourquoi le problème est-il difficile ?

Bien sûr il existe plusieurs niveaux de réponse à une telle question, et nous nous limiterons pour l'instant à quelques considérations élémentaires. A une dimension il est facile de résoudre le modèle d'Ising en champ magnétique et de voir qu'il n'y a pas de transition de phase (pour $d = 1$ les courbes d'aimantation du paragraphe précédent ne sont pas qualitativement correctes). On peut calculer les fonctions de corrélation, et constater que la longueur de corrélation est finie en unités microscopiques (donc typiquement nulle en unités macroscopiques) à toutes les températures. Ceci signifie qu'à toute température l'agitation thermique est suffisante pour contrecarrer la tendance à l'alignement des spins. L'influence d'un spin n'est sensible que sur ses voisins les plus proches. En dimension plus grande, inversant l'argument, il est raisonnable de penser qu'au point critique des corrélations macroscopiques apparaissent dans le matériau (pour la transition liquide vapeur, ceci est associé aux fluctuations de densité macroscopiques responsables de l'opalescence critique) favorisant l'alignement des spins sur de grands domaines et des fluctuations à grande échelle. Le fait qu'au point critique l'aimantation soit encore nulle montre que le lien entre les spins n'est pas rigide. Malgré la tendance macroscopique à l'alignement, des fluctuations à toutes les échelles entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique font que l'aimantation reste nulle. Dans une vision dynamique à très haute température l'agitation thermique rend les spins presque indépendants, à très basse température ils sont rigidement liés. Aucun de ces deux régimes ne permet d'imaginer la configuration locale des spins comme changeant doucement lorsqu'on se déplace dans le matériau. Par contre au point critique, des domaines macroscopiques sont assez corrélés pour que l'aimantation locale varie de manière douce dans le matériau et au cours du temps, mais les fluctuations sont assez grandes pour être elles aussi macroscopiques. On peut donc espérer au voisinage du point critique décrire le système par une aimantation locale fluctuante.

Tous ces arguments sont très très vagues, mais ils vont dans la bonne direction. Ils indiquent que la grande difficulté est que, au point critique, les approximations de couplage faible (les spins sont libres) ou de couplage fort (les spins sont figés les uns par rapport aux autres) sont inadéquates. On est dans un régime intermédiaire où il y a des corrélations mais aussi des fluctuations à toutes les échelles, de la maille du réseau aux distances macroscopiques.

B. NOTION DE LIMITE CONTINUE : MARCHE ALEATOIRE SUR LE RESEAU

Dans les années 1940, le physicien R.P. Feynman a reformulé la mécanique quantique sous une forme très intuitive et en même temps très puissante. Sous sa forme initiale, elle se heurte à de sérieuses difficultés mathématiques, mais nous allons profiter de l'exemple des marches aléatoires pour rappeler l'idée de base. C'est une extension du principe de moindre action. On considère un système physique caractérisé par des variables dynamiques (i.e. des configurations accessibles) $\mathcal{C}$. En mécanique classique, pour chaque trajectoire du système partant d'une configuration $\mathcal{C}_1$ et arrivant à une configuration $\mathcal{C}_2$ on peut calculer une quantité S appelée action, et les lois de la mécanique disent que l'action est minimum pour la trajectoire réelle du système. En mécanique quantique, on calcule l'amplitude de probabilité de passer de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$, et Feynman a suggéré que cette amplitude $\mathcal{A}(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2)$ s'obtenait de la façon suivante : chaque trajectoire du système passant de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ avec action S contribue pour une phase $\mathrm{e}^{\frac{iS}{\hbar}}$ et l'amplitude est la somme de toutes ces phases. Remarquons que $\hbar$ a bien la dimension d'une action. Par exemple, pour une particule libre relativiste dans $\mathbb{R}^4$, avec métrique $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - \mathrm{d}x^2 - \mathrm{d}y^2 - \mathrm{d}z^2$, l'action est simplement $mc\int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}s$ où $\mathcal{T}$ est la trajectoire de la particule. L'action est donc proportionnelle à la longueur (au sens minkovskien) de la trajectoire.

Suivant Feynman, on est amené à postuler que l'amplitude de probabilité pour aller de x_1^μ à x_2^μ est égale à

$$\sum_{\substack{\text{chemins de} \\ x_1^\mu \text{ à } x_2^\mu}} \mathrm{e}^{\frac{i}{\hbar}mc\int \mathrm{d}s} \ . \tag{1}$$

Il est clair que cette somme est mal définie a priori : il y a une infinité non dénombrable de chemins, on ne dit rien sur leur régularité, etc...

Cependant une telle formule a un contenu physique très intéressant : les trajectoires du système contribuent à des amplitudes de probabilité qui interfèrent. Lorsque $\hbar$ tend vers zéro, la différence d'action entre deux trajectoires voisines sera grande devant $\hbar$ et les deux trajectoires interféreront destructivement. Ceci est vrai sauf pour la trajectoire correspondant au minimum de l'action, car la différence d'action avec les trajectoires voisines est du second ordre, et il y a interférence constructive. Donc seul le voisinage de la trajectoire classique contribue à cette somme. Le lien avec la mécanique classique est très intuitif : à la limite $\hbar \longrightarrow 0$ tout se passe comme si le système suivait la trajectoire classique.

Nous allons nous préoccuper maintenant d'un problème apparemment très différent, mais en fait étroitement relié aux considérations précédentes. Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^d$, on considère le réseau des points de coordonnées entières. On veut étudier les chemins aléatoires sur ce réseau. Le nombre de chemins de longueur N reliant un point x à un point x' se note $\mathcal{N}(x, x', N)$. Plutôt que de calculer directement $\mathcal{N}(x, x', N)$ (qui a des descriptions combinatoires très simples) on introduit un "potentiel chimique" μ et on s'intéresse à

$$G(x, x', \mu) \equiv \sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu N}\mathcal{N}(x, x', N) \ .$$

Il est clair que ceci peut se réécrire

$$G\left(x, x', \mu\right) = \sum_{\substack{\text{chemins de} \\ x \text{ à } x'}} \mathrm{e}^{-\mu L} \tag{2}$$

où L est la longueur du chemin.

Comme nous travaillons sur un réseau, cette somme est dénombrable, et nous verrons tout à l'heure qu'elle converge par μ assez grand. L'analogie avec l'intégrale de Feynman est apparente : $G\left(x, x', \mu\right)$ est une version discrétisée d'une somme (mal définie) sur tous les chemins (et plus seulement les chemins sur un réseau), qui n'est autre que l'équivalent dans l'espace eulidien de la formule (1) pour la particule libre relativiste. L'étude de $G\left(x, x', \mu\right)$ est élémentaire.

En dimension d, sur un réseau hypercubique, le nombre total de chemins de longueur N est $(2d)^N$ (à chaque étape on choisit entre $2d$ voisins), donc $\mathcal{N}\left(x, x', N\right) \leq (2d)^N$. Donc $G\left(x, x', \mu\right)$ est majoré par $\sum_0^\infty \left(2d \, \mathrm{e}^{-\mu}\right)^N$. En conséquence si $2d \, \mathrm{e}^{-\mu} < 1$, $G\left(x, x', \mu\right)$ est bien défini. Le système est invariant par translation donc $G\left(x, x', \mu\right)$ ne dépend de x et x' que par la combinaison $x - x'$. On peut donc se contenter d'étudier $G(x, \mu) \equiv G(x, 0, \mu)$. Le système est également invariant par inversion donc $G(x, \mu) = G(-x, \mu)$.

On désigne par $\ell(x)$ la longueur du plus court chemin allant de l'origine au point x.

Alors

$$\begin{aligned}
G(x, \mu) &= \sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu N} \mathcal{N}(x, 0, N) = \sum_{N=\ell(x)}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu N} \mathcal{N}(x, 0, N) \\
&= \sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu(N+\ell(x))} \mathcal{N}(x, 0, N + \ell(x)) \\
&\leq \sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu(N+\ell(x))} (2d)^{N+\ell(x)} = \frac{\left(2d \, \mathrm{e}^{-\mu}\right)^{\ell(x)}}{1 - 2d \, \mathrm{e}^{-\mu}} \, .
\end{aligned}$$

Donc si $2d \, \mathrm{e}^{-\mu} < 1$, $G(x, \mu)$ décroît exponentiellement avec $\ell(x)$.

Si l'on écrit $\left(2d \, \mathrm{e}^{-\mu}\right)^{\ell(x)} = \mathrm{e}^{-\frac{\ell(x)}{\ell_0}}$, on obtient pour la longueur ℓ_0 la valeur suivante : $\ell_0 = -\frac{1}{\log(2d \, \mathrm{e}^{-\mu})}$. C'est une valeur approchée par excès de la longueur de corrélation véritable.

La fonction $G(x, \mu)$ vérifie une équation aux différences très simple :

$$\mathcal{N}(x, 0, N + 1) = \sum_{y \text{ voisin de } x} \mathcal{N}(y, 0, N) \, .$$

Ceci dit simplement que pour arriver à x, il faut passer par un de ses proches voisins. En conséquence

$$\begin{aligned}
\sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu N} \mathcal{N}(x, 0, N) &= \mathcal{N}(x, 0, 0) + \sum_{N=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu N} \mathcal{N}(x, 0, N) \\
&= \delta_{x,0} + \sum_{N=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mu(N+1)} \mathcal{N}(x, 0, N + 1)
\end{aligned}$$

où $\delta_{x,0}$ désigne le symbole de Kroenecker à d dimensions. La dernière somme vaut

$$\mathrm{e}^{-\mu} \sum_{y \text{ voisin de } x} G(y, \mu) \, .$$

Donc

$$G(x,\mu) = \delta_{x,0} + \mathrm{e}^{-\mu} \sum_{y \text{ voisin de } x} G(y,\mu) \tag{3}$$

Dans le cas de la dimension $d = 1$, cette équation permet de calculer explicitement $G(x,\mu)$.

On a

$$G(x,\mu) = \delta_{x,0} + \mathrm{e}^{-\mu}(G(x+1,\mu) + G(x-1,\mu)) \ . \tag{4}$$

Suivant la méthode standard on cherche $G(x,\mu)$ sous la forme $K\ \lambda^{|x|}$. Pour x positif on obtient

$$1 = \mathrm{e}^{-\mu}\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) \ .$$

La condition de convergence de G est $2\ \mathrm{e}^{-\mu} < 1$. Dans ce cas on peut poser $\mathrm{e}^{\mu} = 2 \text{ ch } \alpha$, $\alpha > 0$, d'où l'on tire $\lambda = \mathrm{e}^{\pm\alpha}$. Comme on sait que G décroît exponentiellement, on obtient

$$G(x,\mu) = K\ \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \quad \text{où} \quad \mathrm{e}^{\mu} = 2 \text{ ch } \alpha$$

et l'équation (4) pour $x = 0$ donne

$$K = 1 + 2\ \mathrm{e}^{-\mu-\alpha}\ K$$

d'où $K = \text{ch } \alpha/\text{sh } \alpha$ et finalement

$$G(x,\mu) = \frac{\text{ch } \alpha}{\text{sh } \alpha} \mathrm{e}^{-\alpha|x|} \qquad d = 1 \ .$$

On voit que G diverge pour tout x lorsque $\mathrm{e}^{-\mu}$ tend vers 2. On vérifie que $\ell_0 = (\log \text{ ch } \alpha)^{-1}$ est bien toujours supérieur à la longueur de corrélation α^{-1}.

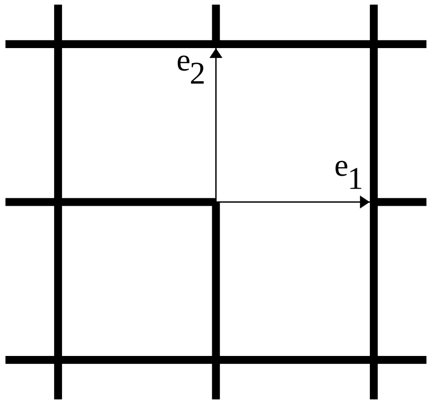
Nous allons maintenant nous concentrer sur le comportement à longue distance de la fonction $G(x,\mu)$. Nous verrons à la fin qu'il y a deux façons complémentaires d'interpréter nos résultats. Cette double interprétation joue un rôle fondamental dans toute la théorie que nous allons développer. Il est donc utile de passer beaucoup de temps sur cet exemple simple mais révélateur.

Jusqu'à présent notre échelle de longueur était la maille du réseau. Mais si l'on désire analyser le comportement à grande distance de $G(x,\mu)$ il vaut mieux changer d'échelle. On introduit donc une longueur microscopique a (la maille du réseau) et on regarde les corrélations à une distance macroscopique de l'ordre de l'unité. Dans ce nouveau système d'unités, la longueur de corrélation est majorée par $-\frac{a}{\log\ 2d\ \mathrm{e}^{-\mu}}$. Donc la longueur de corrélation ne peut être macroscopique que si $-\frac{a}{\log\ 2d\ \mathrm{e}^{-\mu}}$ est de l'ordre de l'unité. Si a est très petit ceci force à ajuster $\log 2d\ \mathrm{e}^{-\mu}$ à une valeur très proche de 1. Dans le cas contraire il n'y aura aucune corrélation macroscopique.

Dans nos nouvelles unités, x désigne un point de coordonnées multiples de a et on définit

$$G_a(x,\mu) \equiv G\left(\frac{x}{a},\mu\right) a^{2-d}\mathrm{e}^{-\mu}. \tag{5}$$

Le facteur $a^{2-d}\mathrm{e}^{-\mu}$ se révélera utile dans la suite.



Avec les nouvelles unités, l'équation (3) devient

$$\frac{\mathrm{e}^{\mu}}{a^2} G_a(x,\mu) = \frac{1}{a^d}\delta_{x/a,0} + \frac{1}{a^2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{\varepsilon=\pm 1} G_a\left(x + a\varepsilon e_i, \mu\right)$$

où les e_i forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^d$.

Ceci se réécrit

$$\frac{\mathrm{e}^{\mu} - 2d}{a^2} G_a(x,\mu) = \frac{1}{a^d}\delta_{x/a,0} + \sum_{i=1}^{d} \frac{G_a\left(x + ae_i, \mu\right) - 2G_a(x,\mu) + G_a\left(x - ae_i, \mu\right)}{a^2} \ .$$

Dans la somme du membre de droite, on reconnaît le laplacien discrétisé $\Delta_a G_a(x,\mu)$ et finalement on obtient

$$-\Delta_a G_a(x,\mu) + \frac{e^{\mu} - 2d}{a^2} G_a(x,\mu) = \frac{1}{a^d}\delta_{x/a,0} \ .$$

Comme a^d est le volume d'une maille élémentaire du réseau lorsque a tend vers 0, $\frac{1}{a^d}\delta_{x/a,0}$ tend vers $\delta(x)$, distribution de Dirac à d dimensions.

Dans ce cadre, $\Delta_a G_a(x,\mu)$ tend formellement vers le laplacien usuel. Donc l'équation (3) n'a de limite non triviale décrivant le comportement à longue distance des marches aléatoires que si $\frac{\mathrm{e}^{\mu}-2d}{a^d}$ tend vers une limite finie, notée m^2 (nous avons vu que $\mathrm{e}^{\mu} - 2d > 0$) lorsque a tend vers 0.

Remarquons que dans un système d'unités où $\hbar = c = 1$ les masses sont des inverses de longueur, donc la notation m^2 est suggestive.

Finalement $G_a(x,\mu)$ tend vers une fonction limite $G_m(x)$ lorsque a tend vers 0 et $\frac{\mathrm{e}^{\mu}-2d}{a^2}$ tend vers m^2. La fonction $G_m(x)$ vérifie

$$\left(-\Delta + m^2\right) G_m(x) = \delta(x) \ . \tag{6}$$

Avant de discuter de manière plus précise le lien entre les équations (3) et (6), nous allons faire quelques remarques sur l'intégrale de Feynman.

La formule heuristique (1) était censée définir l'amplitude pour une particule sans spin de masse m, d'aller d'un point à un autre, et on sait que cette amplitude n'est autre que le propagateur pour le boson libre de masse m, c'est-à-dire une solution élémentaire bien choisie (avancée, retardée,... ?)

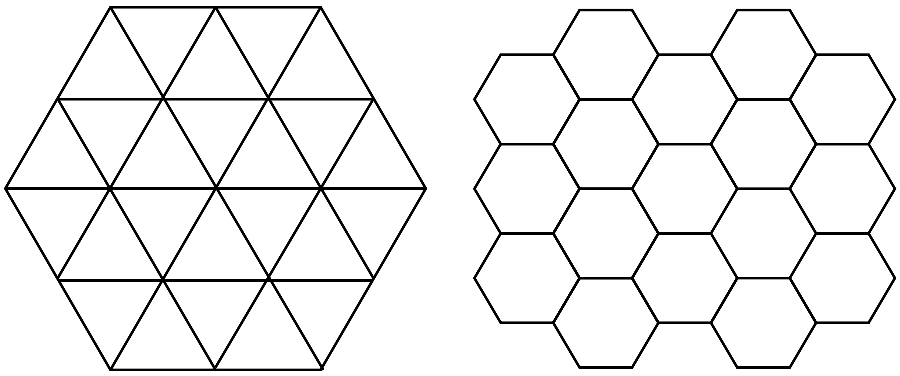
de l'opérateur $\Box + m^2$. Nous avons remarqué que notre marche aléatoire sur le réseau menait à une version euclidienne et discrétisée de l'intégrale de Feynman. Et effectivement nous venons de voir que, à la limite où la discrétisation disparaît, $G_m(x)$ est une solution élémentaire de la version euclidienne de l'opérateur $\Box + m^2$. Il est possible de montrer que le prolongement analytique de la solution de (6) donne pour (1) le propagateur de Feynman (solution élémentaire de $\Box + m^2 - i\varepsilon$). Le lien entre la théorie des champs dans l'espace de Minkowski et la mécanique statistique dans l'espace euclidien est très profond, et nous allons en voir d'autres illustrations dans la suite. Ceci justifie des abus de langage comme par exemple dire que $G_m(x)$ décrit une "particule de masse m".

Revenons maintenant à la signification de nos calculs. Il s'est passé quelque chose de tout à fait remarquable.

En comparant la formule heuristique (1) avec la formule bien définie (2), il eut été tentant de dire que $\frac{\mu}{a}$ était la masse de la particule.

En fait $\frac{\mu}{a}$ est la masse microscopique, mais la masse macroscopique est $\frac{\sqrt{e^{\mu}-2d}}{a}$. Si l'on pose $2d = e^{\mu_{\mathrm{cr}}}$, il y sur le réseau une masse microscopique critique $\frac{\mu_{\mathrm{cr}}}{a} = \frac{\log 2d}{a}$, en deçà de laquelle la théorie est mal définie.

La théorie n'admet une limite non triviale à grande distance que si la masse microscopique tend vers la masse critique. Notons que, dans cette limite de grande distance, les détails du réseau ont disparu. Ceci est encore vrai si l'on change de type de réseau. Le lecteur est invité à refaire pas à pas l'exercice précédent lorsque $d = 2$ sur le réseau triangulaire régulier et le réseau hexagonal régulier.



L'équation (3) est encore valable. Le passage à la limite continue se fait de manière analogue. La redéfinition de G est un peut différente (il faut tenir compte du fait que le "volume" de la maille élémentaire a changé), ainsi que la relation liant a, μ et m^2. Mais une fois ceci fait on arrive à l'équation (6).

Ainsi, même si le réseau brise l'invariance par rotation, celle-ci est restaurée à la limite continue.

Cette indépendance de la physique à grande échelle par rapport aux changements du réseau microscopique est un exemple très particulier de ce qu'on appelle l'universalité. C'est une propriété très utile, et souvent d'importance cruciale. Par exemple, supposons que nous voulions décrire des polymères, c'est-à-dire de longues chaînes d'atomes. Nous voulons le modèle le plus simple possible. On imagine les liaisons entre atomes commes des bâtonnets, libres en rotation les uns par rapport aux autres. Les liaisons ont une longueur a. Une des questions les plus simples est la suivante : si le polymère a N maillons, à quelle distance se trouvent typiquement les extrémités de la chaîne ? On s'intéresse au cas où N est très grand. Pour rendre le problème plus simple, on peut imposer aux maillons d'être sur les liens d'un réseau. Comme N est grand, on veut que le potentiel chimique μ soit proche de sa valeur critique $\mu_{\rm cr}$. L'universalité nous assure que les résultats ne dépendront pas du réseau choisi. De manière indirecte, nous connaissons la réponse. En effet, le lien entre m et μ à la limite continue est

$$\frac{m^2}{2d} = \frac{\mathrm{e}^{\mu-\mu_{\rm cr}} - 1}{a^2} \ .$$

Soit, si μ tend vers $\mu_{\rm cr}$,

$$\frac{\mu - \mu_{\rm cr}}{a^2} \simeq \frac{m^2}{2d} \ .$$

La masse microscopique est $m_0 = \frac{\mu}{a}$ d'où

$$\frac{m_0 - m_{\rm cr}}{a} = \frac{m^2}{2d} \quad \text{ou encore} \quad m \propto \sqrt{\frac{m_0 - m_{\rm cr}}{a}} \ .$$

Un peu de réflexion montre que ceci est relié au fait que les extrémités d'une marche aléatoire de N pas sont éloignées en moyenne d'une distance $\sqrt{N}$.

Disons pour conclure que notre modèle de polymères est beaucoup trop primitif, entre autres parce que les polymères réels sont plus rigides et évitent les auto-intersections.

Un autre genre de problème est de simuler (par exemple grâce à un ordinateur) une marche aléatoire dans le continu. Nos calculs nous montrent que c'est possible. On peut remplacer le continu par un réseau à condition d'ajuster la masse microscopique et la maille du réseau (plus elle sera petite, plus il faudra un gros ordinateur) pour que la théorie à longue distance ait la masse macroscopique voulue.

Il y a donc deux manières complémentaires d'interpréter notre démarche. Il est très important de bien assimiler tous les détails de ce cas très simple.

Pour terminer cette discussion, notons que la relation (5) fixe les propriétés dimensionnelles de $G_m(x)$. En effet $G\left(\frac{x}{a}, \mu\right)$ est sans dimensions, donc $G_a(x,\mu)a^{d-2}$ est sans dimensions. Posant $m^2 = \frac{\mathrm{e}^{\mu}-2d}{a^2}$, on montre donc que $G_a(x,\mu)m^{2-d}$ est sans dimensions. Finalement $G_a(x,\mu)m^{2-d} = \Gamma(mx, ma)$.

Passant à la limite $a = 0$ on obtient

$$G_m(x) = m^{d-2}\Gamma(mx, 0) \ .$$

Si $m = 0$, $G_0(x)$ est une pure puissance (on suppose $d > 2$)

$$G_0(x) \propto |x|^{2-d} \ .$$

Dans la suite, nous aurons souvent à utiliser le lien entre la décroissance à l'infini d'un propagateur et la structure de sa transformée de Fourier (position des pôles). Pour le champ libre ce lien est élémentaire. Si nous écrivons G_m en transformée de Fourier, nous obtenons

$$G_m(x) = \int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{e}^{ipx}}{p^2 + m^2} \ .$$

Si l'on insère l'identité

$$\frac{1}{p^2 + m^2} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t\left(p^2+m^2\right)} \mathrm{d}t \ .$$

l'intégration sur p devient élémentaire et donne

$$G_m(x) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-tm^2 - \frac{x^2}{4t}} \frac{\mathrm{d}t}{(4\pi t)^{d/2}}\,.$$

Posant $m|x| = r$ et $t\,m^2 = ur/2$, on obtient

$$G_m(x) = \left(\frac{r}{2m^2}\right)^{1-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(u+\frac{1}{u}\right)r}\,\frac{\mathrm{d}u}{(4\pi u)^{d/2}}\,.$$

Pour r grand la méthode du col (sur laquelle nous reviendrons à plusieurs reprises dans la suite) donne

$$G_m(x) \sim \frac{1}{2}\frac{m^{d-2}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} r^{1-\frac{d}{2}}\ \mathrm{e}^{-r}$$

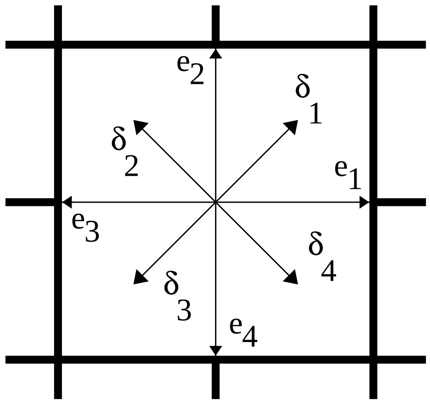
donc m qui est la position du pôle, s'interprète physiquement comme l'inverse de la longueur de corrélation. Ce résultat est en fait très général.

C. LE MODELE D'ISING EN DIMENSION 2

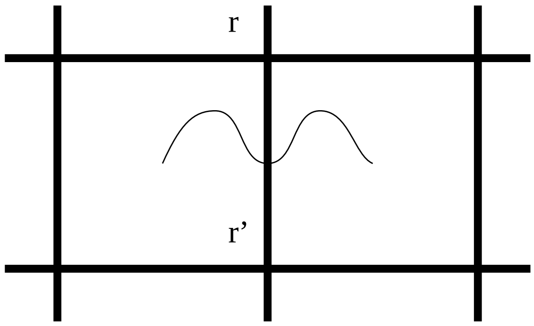
En dimension 2, le modèle d'Ising, dont nous avons rappelé l'origine en introduction, est exactement soluble. On sait calculer la fonction de partition, mais aussi de nombreuses autres quantités sans faire d'approximations. A ce jour, plusieurs dizaines de solutions ont été publiées. L'une d'elles montre particulièrement bien le lien avec la théorie des champs, et nous allons l'exposer brièvement.

Chaque site d'un réseau carré porte un spin $\sigma = \pm 1$. Les spins interagissent avec leurs proches voisins et l'énergie d'une configuration est $E = -J \sum_{\langle r,r' \rangle} \sigma(r)\sigma(r')$ où la notation $\sum_{\langle r,r' \rangle}$ signifie somme sur les paires de proches voisins, c'est-à-dire somme sur les liens. Nous supposons que le réseau est grand mais fini afin d'éviter les problèmes de convergence.

Les centres des carrés forment également un réseau, dit réseau dual du précédent. Nous aurons besoin dans la suite d'une famille de vecteurs pour repérer les points du réseau et de son dual. Choisissons la famille suivante :



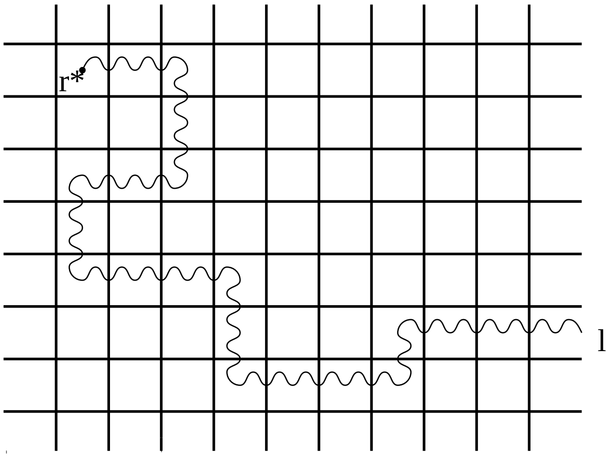
Chaque lien du réseau dual coupe un lien du réseau initial. Si $\langle r, r' \rangle$ est un tel lien nous notons



la fonctionnelle $\mathrm{e}^{-2\beta J\sigma(r)\sigma(r')}$. Il est clair que calculer des valeurs moyennes de produits de tels objets revient à calculer une fonction de partition où l'on a changé en $-J$ les couplages sur les liens concernés.

Ceci permet de définir les variables de désordre. On considère une ligne ℓ semi infinie, faite de liens du réseau dual. Elle démarre en un point r^* et s'en va à l'infini.

On note $\mu(\ell)$ la fonctionnelle $\prod \mathrm{e}^{-2\beta J\sigma(r)\sigma(r')}$ où le produit s'étend sur les liens $\langle r, r' \rangle$ coupés par la ligne. Lorsque plusieurs lignes sont présentes, on demande qu'elles n'aient pas de liens



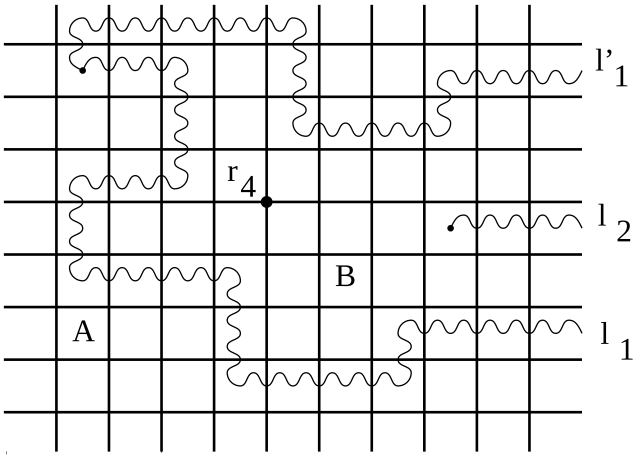
Ligne de désordre.

communs. Dans ce cas, on vérifie que

$$\langle \mu(\ell_1)...\mu(\ell_n)\ \ \sigma(r_1)...\sigma(r_m)\rangle = \frac{1}{Z}\sum_{\mathcal{C}} \sigma(r_1)...\sigma(r_m)\,\mathrm{e}^{-\beta\tilde{E}(\mathcal{C})} \tag{1}$$

où $\tilde{E}(\mathcal{C})$ est obtenu à partir de $E(\mathcal{C})$ en changeant J en $-J$ pour les liens coupés par une ligne.

Les variables μ s'appellent variables de désordre. Leur définition montre que ce ne sont pas des variables locales dans les spins. Cependant nous allons voir que leurs corrélations dépendent essentiellement de l'extrémité des lignes de désordre, et pas de la position exacte de la ligne. Plus précisément, considérons la fonction de corrélation (1) et comparons-la avec la fonction de corrélation òu l'on a changé ℓ_1 en une autre ligne de même extrémité ℓ'_1. On appelle $\tilde{E}(\mathcal{C})$ et $\tilde{E}'(\mathcal{C})$ les énergies en présence de ℓ_1 et ℓ'_1. En général, le réseau privé des liens coupés par ℓ_1 ou ℓ'_1 n'est plus connexe. Alors $\ell_1 \cup -\ell'_1$ est le bord de deux domaines du réseau A et B.

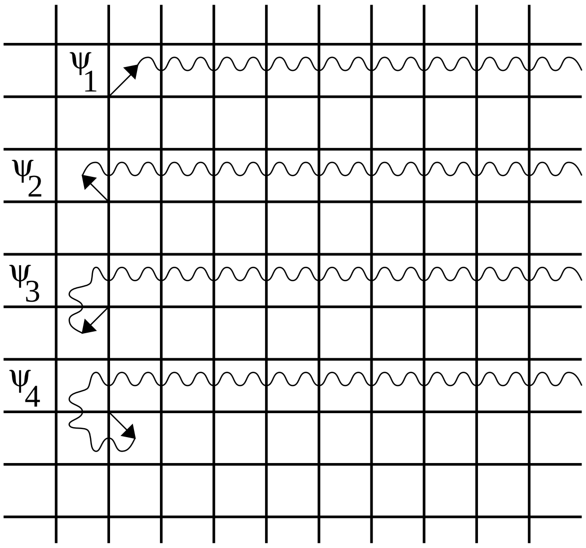


Les régions A et B.

On peut décomposer toute configuration $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B$ et il est facile de voir que $\tilde{E}(\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B) = \tilde{E}'(\mathcal{C}_A \cup \mathcal{C}_B^*)$ où $\mathcal{C}_B^*$ est obtenu en retournant tous les spins dans la configuration $\mathcal{C}_B$. Comme on somme sur toutes les configurations, ceci implique l'existence d'une symétrie. Dans cette symétrie les spins changent de signe mais les opérateurs de désordre $\mu(\ell_2)...\mu(\ell_n)$ sont invariants. Donc changer ℓ_1 en ℓ_1' multiplie la fonction de corrélation par ± 1 suivant la parité du nombre des points $r_1, ..., r_m$ contenus dans la région A ou dans la région B (si m est impair la fonction de corrélation est donc identiquement nulle). En particulier, si l'on déplace continûment ℓ_1 sans entourer de spins, la fonction de corrélation reste invariante.

Nous nous autorisons dans la suite à écrire $\mu(r^*)$ pour $\mu(\ell)$ si r^* est l'extrémité de ℓ située à distance finie.

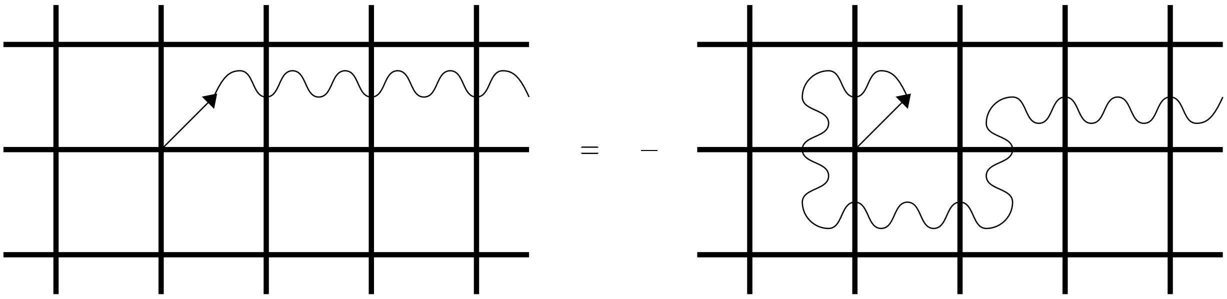
Les variables définies par $\psi_\alpha(r) = \sigma(r)\mu(r + \delta_\alpha)$ ont des propriétés très intéressantes. Pour les définir sans ambiguité, on décide que la ligne de désordre part vers l'infini à droite (voir dessin) et on ne s'intéresse qu'à la fonction de corrélation $\langle\psi_\alpha(r)\rangle$ sans autre insertion.



Définition des variables ψ_α.

Les considérations précédentes montrent qu'il est naturel d'étendre ψ_α pour $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec la règle $\psi_{\alpha+4} = -\psi_\alpha$.

Par exemple



Cette propriété d'antipériodicité rappelle les fermions. Nous allons voir que l'analogie est plus profonde.

Les variables ψ_α vérifient des équations linéaires très simples. Par exemple

$$\begin{aligned}\psi_2(r) &= \sigma(r)\prod_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta J\ \sigma(r+ne_1)\sigma(r+ne_1+e_2)} \\ &= \sigma(r)\mathrm{e}^{-2\beta J\ \sigma(r)\sigma(r+e_2)} \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta J\ \sigma(r+ne_1)\sigma(r+ne_1+e_2)}\ .\end{aligned}$$

Mais si $\varepsilon = \pm 1$ on a $\mathrm{e}^{A\varepsilon} = \mathrm{ch}\ A + \varepsilon\ \mathrm{sh}\ A$ donc

$$\begin{aligned}\psi_2(r) &= \sigma(r)\left(\mathrm{ch}\ 2\beta J - \mathrm{sh}\ 2\beta J\ \sigma(r)\sigma\left(r+e_2\right)\right) \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta J\ \sigma(r+ne_1)\sigma(r+ne_1+e_2)} \\ &= \mathrm{ch}\ 2\beta J\ \psi_1(r) - \mathrm{sh}\ 2\beta J\ \sigma\left(r+e_2\right) \prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta J\ \sigma(r+ne_1)\sigma(r+ne_1+e_2)}\ .\end{aligned}$$

Pour l'instant nous avons obtenu une identité algébrique. Si nous considérons maintenant la fonction de corrélation $\langle\psi_2(r)\rangle$ nous pouvons bouger la ligne de désordre

$$\prod_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\beta J\ \sigma(r+ne_1)\sigma(r+ne_1+e_2)}.$$

Nous obtenons donc

$$\langle\psi_2(r)\rangle = \mathrm{ch}\ 2\beta J\,\langle\psi_1(r)\rangle - \mathrm{sh}\ 2\beta J\,\langle\psi_0\left(r+e_2\right)\rangle\ .$$

En général on vérifie que

$$\langle\psi_\alpha(r)\rangle = \mathrm{ch}\ 2\beta J\ \ \langle\psi_{\alpha-1}(r)\rangle - \mathrm{sh}\ 2\beta J\,\langle\psi_{\alpha-2}\left(r+e_\alpha\right)\rangle\ . \tag{2}$$

En fait ce raisonnement reste "presque correct" si on insère ψ dans une fonction de corrélation plus compliquée. Supposons que les positions des autres opérateurs sont fixées et insérons ψ_α en un point r éloigné. Il faut alors dire précisément comment la ligne de désordre part à l'infini, mais ceci peut se faire de façon cohérente dans un voisinage de r et ensuite le même raisonnement montre que l'équation (2) reste vraie même s'il y a d'autres opérateurs dans la fonction de corrélation.

On écrit donc

$$\psi_\alpha(r) = \mathrm{ch}\ 2\beta J\ \psi_{\alpha-1}(r) - \mathrm{sh}\ 2\beta J\ \psi_{\alpha-2}\left(r+e_\alpha\right)$$

au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation. Cependant il faut être soigneux pour définir l'insertion de ψ lorsqu'on approche d'autres opérateurs. Il y a donc en toute rigueur des termes supplémentaires, dits "termes de contact" (car ils sont nuls tant que r est "assez loin" des autres insertions), dans l'équation précédente. Comprendre l'origine de ces termes est un bon exercice. Pour l'instant contentons nous d'analyser (2).

C'est une équation linéaire en ψ dont les coefficients ne dépendent pas de la position, donc en transformée de Fourier sur r (2) devient diagonale. On écrit

$$\psi_\alpha(r) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}{4\pi^2}\ \hat{\psi}_\alpha(k)\ \mathrm{e}^{ik\cdot r}$$

(où $k_\alpha \equiv k \cdot e_\alpha$). L'équation (2) implique

$$\hat{\psi}_\alpha(k) = \text{ch } 2\beta J \ \hat{\psi}_{\alpha-1}(k) - \text{sh } 2\beta J \ \hat{\psi}_{\alpha-2}(k) \mathrm{e}^{ik_\alpha} \ . \tag{3}$$

Cette équation n'a de solution non triviale que si le déterminant du système linéaire (3) pour $\alpha = 1, 2, 3, 4$ est nul (Ne pas oublier que $\hat{\psi}_{\alpha+4} = -\hat{\psi}_\alpha$).

La relation de dispersion pour la propagation des excitations ψ est donc

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\text{sh } 2\beta J \ \mathrm{e}^{ik_1} & \text{ch } 2\beta J \\ -\text{ch } 2\beta J & 1 & 0 & -\text{sh } 2\beta J \ \mathrm{e}^{ik_2} \\ \text{sh } 2\beta J \ \mathrm{e}^{-ik_1} & -\text{ch } 2\beta J & 1 & 0 \\ 0 & \text{sh } 2\beta J \ \mathrm{e}^{-ik_2} & -\text{ch } 2\beta J & 1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Ce déterminant vaut

$$2 \ \text{ch}^2 2\beta J \left(\text{ch}^2 2\beta J - \text{sh } 2\beta J \left(\cos k_1 + \cos k_2 \right) \right)$$

Il est toujours positif et ne peut s'annuler que pour sh $2\beta J = 1$ et

$$k_1 = k_2 = 0 \ .$$

Ceci signifie que si on introduit dans (2) une source j pour le champ ψ et qu'on cherche à résoudre

$$\hat{\psi}_\alpha(k) - \text{ch } 2\beta J \ \hat{\psi}_{\alpha-1}(k) + \text{sh } 2\beta J \ \hat{\psi}_{\alpha-2}(k) \mathrm{e}^{ik_\alpha} = \hat{\jmath}_\alpha(k)$$

ou dans l'espace réel

$$\psi_\alpha(r) - \text{ch } 2\beta J \ \psi_{\alpha-1}(r) + \text{sh } 2\beta J \ \psi_{\alpha-2}\left(r + e_\alpha\right) = j_\alpha(r)$$

les seules singularités possibles viennent de la région où sh $2\beta J$ est voisin de 1 et k_1 et k_2 sont proches de zéro. Pour le reste tout est régulier.

On peut retrouver ces valeurs particulières en répondant à la question suivante : quand le modèle d'Ising engendre-t-il des corrélations à grande portée ? Une réponse simple est : quand l'équation (2) a des solutions variant peu sur des distances grandes devant la maille du réseau, c'est-à-dire quand (3) a des solutions pour k petit. A la limite $k = 0$ on veut résoudre

$$\hat{\psi}_\alpha(0) = \text{ch } 2\beta J \ \hat{\psi}_{\alpha-1}(0) - \text{sh } 2\beta J \ \hat{\psi}_{\alpha-2}(0) \ . \tag{4}$$

Comme $\hat{\psi}_{\alpha+4} = -\hat{\psi}_\alpha$, on peut chercher des solutions de la forme

$$\hat{\psi}_\alpha = \mathrm{e}^{2i\pi\alpha\gamma/4} \hat{\Lambda}_\gamma$$

avec $\gamma = -3/2, \ -1/2, \ 1/2, \ 3/2$. Pour $\gamma = \pm 3/2$, (4) implique $\hat{\Lambda}_\gamma = 0$. Par contre pour $\gamma = \pm 1/2$, (4) a des solutions non triviales si sh $2\beta J = 1$. Il est donc naturel de penser que la température critique β_c de ce modèle est donnée par sh $2\beta_c J = 1$.

Pour calculer les fonctions thermodynamiques du modèle d'Ising, nous avons besoin d'une étude plus précise des termes de contact dans la fonction à deux points pour les variables $\psi_\alpha(r)$.

Il faut être soigneux pour définir de façon cohérente $\langle \psi_\alpha(r) \psi_{\alpha'}(r') \rangle$. Supposons tout d'abord les deux opérateurs insérés en des points éloignés. La donnée de (r, α) et (r', α') définit $\langle \psi_\alpha(r) \psi_\alpha(r') \rangle$

de façon ambiguë. Il faut préciser la disposition relative des lignes de désordre. Elles n'ont pas de lien commun et il faut dire laquelle part vers l'infini (dans la direction e_1, rappelons-le) en restant au dessus de l'autre (c'est-à-dire avec la plus grande composante suivant e_2). Il est facile de voir que l'ambiguité de $\langle\psi_\alpha(r)\psi_{\alpha'}(r')\rangle$ est un signe en utilisant le résultat sur l'effet d'un déplacement d'une ligne de désordre. Comme les fermions anticommutent en théorie des champs, ceci est un indice supplémentaire du caractère fermionique des variables $\psi_\alpha(r)$, et on voudrait conserver cette propriété en toute généralité. Cependant si $r = r'$ et $\alpha = \alpha'$ on voit que $\psi_\alpha(r)^2 = 1$. On demande donc à avoir une définition telle que (au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation) $\psi_\alpha(r)\psi_{\alpha'}(r') + \psi_{\alpha'}(r')\psi_\alpha(r) = 2\delta_{r,r'}\delta_{\alpha,\alpha'}$ pour tout r, r' du réseau et $\alpha, \alpha' = 1,2,3,4$. Ensuite on prolonge pour α et α' entiers arbitraires en disant que $\psi_\alpha(r)$ est antipériodique modulo 4. On procède donc de la façon suivante. On pose $\psi_r(\alpha)^2 = 1$. Pour le reste des possibilités on définit $\psi_\alpha(r)\psi_{\alpha'}(r')$ pour r' en dessous de r par exemple et on prolonge par antisymétrie. Plus précisément si r_x et r_y sont les composantes de r suivant e_1 et e_2 on définit $\psi_\alpha(r)\psi_{\alpha'}(r')$ pour $\left(r_y > r'_y\right)$ ou $(r_y = r'_y$ et $r_x < r'_x)$ ou $(r_y = r'_y,\ r_x = r'_x$ et $\alpha > \alpha')$, en demandant que de façon cohérente la ligne de désordre de $\psi_\alpha(r)$ passe au dessus de la ligne de $\psi_{\alpha'}(r')$. Cette définition recouvre exactement la moitié des cas où $\psi_\alpha(r)$ et $\psi_{\alpha'}(r')$ sont distincts, et pour finir on prolonge par antisymétrie.

Partant de cette définition, il faut parfois bouger les lignes de désordre pour arriver à la position qui permet d'appliquer à $\psi_\alpha(r)$ les manipulations qui amenaient à l'équation (2). Après ces manipulations il faut correctement identifier les contributions obtenues, au besoin en bougeant à nouveau les lignes de désordre. C'est lors de ces manoeuvres que les surprises peuvent arriver. En effet lorsqu'une ligne de désordre passe sur un spin il se produit un changement de signe. Mais le nombre de spins retournés n'est pas forcément le même lors de la première déformation des lignes de désordre et lors de la seconde. Les problèmes se produisent lorsque l'application des équations du mouvement (2) sépare des points coïncidents ou fait coïncider des points distincts. Ceci arrive si $(\alpha = \alpha'$ et $r = r')$ ou si $(\alpha \pm 2 = \alpha'$ et $r + e_\alpha = r')$. Dans ces deux cas le carré d'une variable ψ apparaît avec un signe incorrect. Nous laissons au lecteur le soin de regarder le détail du calcul. Le résultat s'écrit le plus simplement en transformée de Fourier. Posant

$$G_{\alpha,\alpha'}(r,r') \equiv \langle\psi_\alpha(r)\psi_{\alpha'}(r')\rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}{4\pi^2}\ \hat{G}_{\alpha\alpha'}(k)\ \mathrm{e}^{ik\left(r-r'\right)}\ ,$$

$$\mathrm{sh}\ 2\beta J \equiv s\ , \qquad \mathrm{ch}\ 2\beta J \equiv c\ ,$$

et notant $\hat{G}(k)$ la matrice de composantes $\hat{G}_{\alpha\alpha'}(k)$, $\alpha, \alpha' = 1,2,3,4$, on obtient

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -s\ \mathrm{e}^{ik_1} & c \\ -c & 1 & 0 & -s\ \mathrm{e}^{ik_2} \\ s\ \mathrm{e}^{-ik_1} & -c & 1 & 0 \\ 0 & s\ \mathrm{e}^{-ik_2} & -c & 1 \end{pmatrix} \hat{G}(k) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2s\ \mathrm{e}^{ik_1} & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2s\ \mathrm{e}^{ik_2} \\ 2s\ \mathrm{e}^{-ik_1} & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2s\ \mathrm{e}^{-ik_2} & 0 & 2 \end{pmatrix} \tag{5}$$

On en déduit

$$\left(c^2 - s\left(\cos\,k_1 + \cos\,k_2\right)\right)\hat{G}(k) =$$

$$\begin{pmatrix} c^2 - s\left(\mathrm{e}^{-ik_1} + \mathrm{e}^{ik_2}\right) & c\left(s\ \mathrm{e}^{ik_1} - 1\right) & s^2\mathrm{e}^{i(k_1+k_2)} - 1 & c\left(s\ \mathrm{e}^{ik_2} - 1\right) \\ c\left(1 - s\ \mathrm{e}^{-ik_1}\right) & c^2 - s\left(\mathrm{e}^{-ik_1} + \mathrm{e}^{-ik_2}\right) & c\left(s\ \mathrm{e}^{ik_2} - 1\right) & s^2\mathrm{e}^{i(-k_1+k_2)} - 1 \\ 1 - s^2\mathrm{e}^{-i(k_1+k_1)} & c\left(1 - s\ \mathrm{e}^{-ik_2}\right) & c^2 - s\left(\mathrm{e}^{ik_1} + \mathrm{e}^{-ik_2}\right) & c\left(s\ \mathrm{e}^{-ik_1} - 1\right) \\ c\left(1 - s\ \mathrm{e}^{-ik_2}\right) & 1 - s^2\mathrm{e}^{i(k_1-k_2)} & c\left(1 - s\ \mathrm{e}^{ik_1}\right) & c^2 - s\left(\mathrm{e}^{ik_1} + \mathrm{e}^{ik_2}\right) \end{pmatrix} .$$

Nous avons donc une description complète de la fonction à deux ψ, dont les points communs avec un propagateur de théorie des champs sont (comme pour la marche aléatoire) manifestes. Partant de cette expression deux possibilités s'offrent à nous : passer à la limite continue d'une part, calculer les fonctions thermodynamiques d'autre part.

Pour passer à la limite continue nous allons procéder comme dans le cas de la marche aléatoire, mais un nouveau phénomène va se produire. Sur le réseau, il y a quatre variables ψ indépendantes. Ceci se reflète dans le fait que la matrice $\hat{G}(k)$ est inversible. En effet prenant le déterminant de (5) on obtient

$$\left(c^2 - s\left(\cosh\, k_1 + \cosh\, k_2\right)\right) \;\det\, \hat{G}(k) = 16c^4$$

ce qui montre que $\hat{G}(k)$ n'est singulier que pour $k = 0$, sh $2\beta J = 1$. Comme dans le cas de la marche aléatoire, nous allons étudier le comportement de $G_{\alpha\alpha'}(r, r')$ lorsque $|r - r'| \longrightarrow \infty$. Nous prenons une notation matricielle pour éviter une prolifération des indices et notons $G(r)$ la matrice de composantes $G_{\alpha\alpha'}(r, 0)$. Nous partons donc de

$$G(r) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}{4\pi^2}\; \hat{G}(k)\; \mathrm{e}^{ikr} \;.$$

Il y a de nombreuses façons de voir que $G(r)$ décroît exponentiellement à $|r|$ grand si sh $2\beta J \neq 1$. Tout d'abord on peut raisonner naïvement en disant que si sh $2\beta J \neq 1$, $\hat{G}(k)$ n'a pas de singularités en k donc on peut intégrer par parties en remarquant que

$$\mathrm{e}^{ikr} = \frac{1}{ir_x}\frac{\partial}{\partial k_1}\mathrm{e}^{ikr} = \frac{1}{ir_y}\frac{\partial}{\partial k_2}\mathrm{e}^{ikr}.$$

En répétant cette opération un nombre arbitraire de fois, on fait sortir une puissance négative arbitrairement grande de $|r|$ et ce qui reste sous le signe somme est borné sur le domaine d'intégration. Ceci ne marche que grâce à la périodicité qui évite tous les termes de bord. Donc $G(r)$ décroît plus vite que toute puissance négative de $|r|$ pour $|r|$ grand. On peut être plus rigoureux en utilisant un peu d'analyse complexe. Posant $u = \mathrm{e}^{ik_1}$, $v = \mathrm{e}^{ik_2}$ on écrit

$$G(r) = \frac{1}{(2i\pi)^2}\oint_{|u|=1}\oint_{|v|=1} \frac{\mathrm{d}u}{u}\frac{\mathrm{d}v}{v}\hat{G}(u,v)u^{r_x}v^{r_y} \;.$$

Comme l'intégrand est une fonction holomorphe on peut déformer les contours d'intégration. Quitte à changer u en $\frac{1}{u}$ ou v en $\frac{1}{v}$ on peut supposer r_x et r_y positifs. Le dénominateur dans G est

$$c^2 - \frac{s}{2}\left(u + \frac{1}{u} + v + \frac{1}{v}\right)$$

et on vérifie sans peine que cette expression n'est pas singulière dans le domaine $\mathrm{e}^{-\mu} < |u| \leq 1$, $\mathrm{e}^{-\mu} < |v| \leq 1$ où l'on a posé $\mathrm{e}^{-\mu} = \min\left(s, s^{-1}\right)$. On en déduit par déformation de contour que la décroissance dominante de $G(r)$ est au moins en $\mathrm{e}^{-\mu(|r_x|+|r_y|)}$. En raffinant cette méthode on peut en fait obtenir un développement asymptotique de $G(r)$ à $|r|$ grand. Ceci montre que pour avoir des corrélations à une échelle macroscopique donnée, il faut ajuster β à une valeur proche de β_c telle que sh $2\beta_c J = 1$. Nous allons donner encore une version de ce raisonnement. Introduisons explicitement la dépendance en β et notons en conséquence $G(r, \beta)$ pour $G(r)$. On change alors l'échelle de longueur et on note a la maille du réseau. Dans les nouvelles unités, r désigne un point de coordonnées multiples de a et on définit

$$G_a(r,\beta) = \frac{1}{4a\sqrt{2}} G\left(\frac{r}{a},\beta\right) \ .$$

La normalisation choisie donne une formule finale simple.

On a donc

$$G_a(r,\beta) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \ \hat{G}(k) \ \mathrm{e}^{i\frac{k}{a}r}$$

soit, posant $k = qa$

$$G_a(r,\beta) = \frac{a}{4\sqrt{2}} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2}{4\pi^2} \ \hat{G}(qa) \ \mathrm{e}^{iqr} \ .$$

Il est clair que, à la limite $a \longrightarrow 0$ à $\beta \neq \beta_c$ fixé, l'intégrale est proportionnelle à $\delta(r)$, ce qui est encore une autre façon de caractériser le comportement à grande distance de G. Pour avoir une limite non triviale pour G_a il faut en particulier que $c^2 - s\,(\cos q_1 a + \cos q_2 a)$ ait une limite non triviale, ce qui signifie que $c^2 - 2s$ et $sa^2\frac{q^2}{2}$ sont du même ordre de grandeur. Il faut donc ajuster $\beta(a)$ pour que $\frac{\mathrm{ch}^2 2\beta J - 2\ \mathrm{sh}\ 2\beta J}{a^2}$ ait une limite finie pour $a \longrightarrow 0$. Notons $\frac{m^2}{2}$ cette limite, et posons $\varepsilon = 2\,(\beta - \beta_c)\,J$. La région de limite continue est alors la région $\varepsilon \sim \frac{ma}{2}$. Il ne reste plus qu'à extraire les termes dominants de $\hat{G}(qa)$ dans cette limite. On obtient

$$\hat{G}(qa) \sim \frac{2}{(q^2+m^2)\,a} \times$$
$$\times \begin{pmatrix} i\,(q_1 - q_2) & m + i\sqrt{2}\ q_1 & \sqrt{2}m + i\,(q_1+q_2) & m + i\sqrt{2}\ q_2 \\ -m + i\sqrt{2}\ q_1 & i\,(q_1+q_2) & m + i\sqrt{2}\ q_2 & \sqrt{2}\ m + i\,(-q_1+q_2) \\ -\sqrt{2}\ m + i\,(q_1+q_2) & -m + i\sqrt{2}\ q_2 & i\,(-q_1+q_2) & m - i\sqrt{2}\ q_1 \\ -m + i\sqrt{2}\ q_2 & -\sqrt{2}m + i\,(-q_1+q_2) & -m - i\sqrt{2}\ q_1 & i\,(-q_1 - q_2) \end{pmatrix} \ .$$

Nous pouvons maintenant prendre la limite $a \longrightarrow 0$. Appelons $G_m(r)$ la fonction limite. Alors $\hat{G}_m(q)$ est simplement la limite pour $a \longrightarrow 0$ de $a\ \hat{G}(qa)$.

On peut interpréter $G_a(r,\beta)$ comme la fonction à deux points de l'opérateur $\frac{1}{2^{5/4}a^{1/2}}\psi_\alpha\left(\frac{r}{a}\right)$. A la limite continue ceci définit un opérateur dit renormalisé $\psi_\alpha^{(R)}(r)$ dont la fonction à deux points est $\left\langle \psi_\alpha^{(R)}(r)\psi_{\alpha'}^{(R)}(0)\right\rangle = [G_m(r)]_{\alpha\alpha'}$. On peut développer $\psi_\alpha^{(R)}$ sur une base d'états propres du moment cinétique, c'est-à-dire écrire

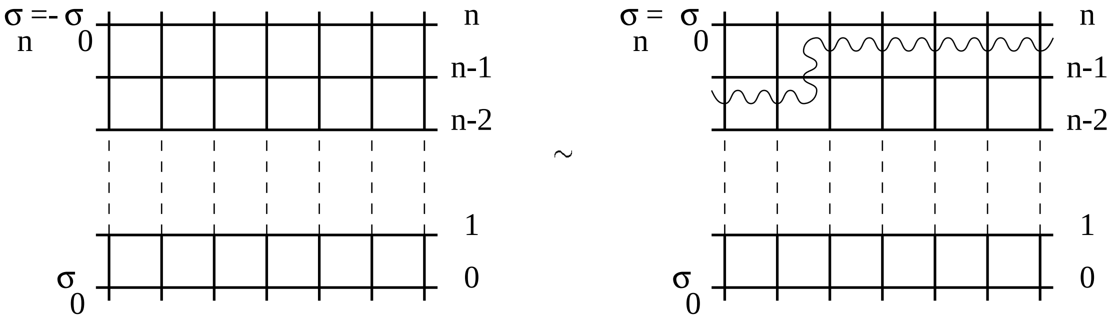
$$\psi_\alpha^{(R)} = \frac{1}{2}\sum_\gamma \mathrm{e}^{2i\pi\alpha\gamma/4}\Lambda_\gamma^{(R)}$$

avec $\gamma \in \{-3/2, -1/2, 1/2, 3/2\}$. On vérifie alors que la fonction de corrélation à deux points de $\Lambda_\gamma^{(R)}$ est

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}q_1 \mathrm{d}q_2}{4\pi^2}\frac{1}{q^2+m^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{i\pi/4}\,(q_1 + iq_2) & -im & 0 \\ 0 & im & \mathrm{e}^{-i\pi/4}\,(q_1 - iq_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{iqr}$$

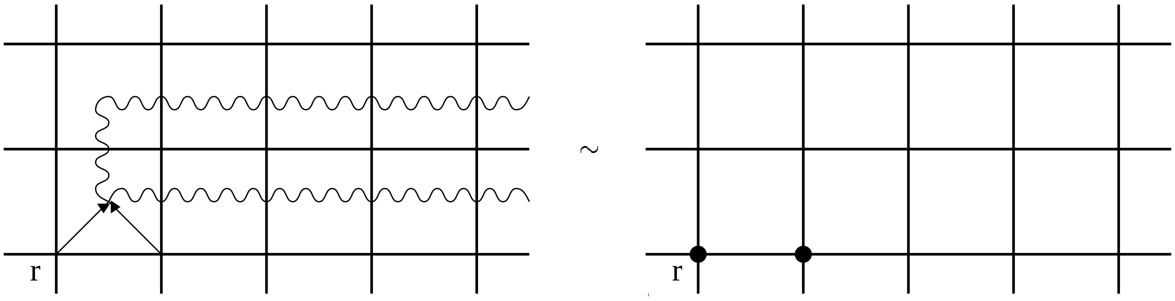
Donc les composantes de spin $3/2$ ont disparu lors du passage à la limite continue, alors que celles de spin $1/2$ ont une fonction à deux points qui est la version euclidienne du propagateur de Dirac. La signification de ce phénomène surprenant est la suivante. La fonction de corrélation $\langle\psi_\alpha(r)\psi_{\alpha'}(0)\rangle$ contient plusieurs longueurs de corrélation et il existe une température physique pour laquelle une de ces longueurs de corrélation diverge, mais les autres restent finies. En unités macroscopiques, une des longueurs de corrélation peut être ajustée à une valeur finie, mais les autres tendent vers 0. Les corrélations des composantes de spin $3/2$ ne reçoivent aucune contribution ayant une longueur de corrélation macroscopique.

Nous avons donc mis en évidence l'existence de corrélations à longue portée d'excitations fermioniques dans le modèle d'Ising à une température bien définie β_c. Il faut noter que les excitations fermioniques font intervenir des lignes de désordre. Leur apparition n'est pas totalement artificielle. Imaginons que le réseau soit fini dans une direction, avec des conditions aux limites antipériodiques pour les spins. Il est facile de voir que ceci est équivalent à des conditions aux limites périodiques avec une ligne de désordre traversant le système.



On peut donc s'attendre à ce que les excitations fermioniques apparaissent directement dans certaines conditions aux limites. Des calculs exacts confirment cette hypothèse.

Nous allons maintenant calculer l'énergie libre par site du modèle d'Ising à deux dimensions. En fait nous avons tous les outils nécessaires. Pour le moment, restons en unités macroscopiques où la maille du réseau est 1. Le point de départ est la remarque que la valeur moyenne $\langle\sigma(r)\sigma(r+e_\alpha)\rangle$ est reliée à une valeur moyenne d'opérateurs ψ. Par exemple $\langle\psi_1(r)\psi_2(r+e_1)\rangle = \langle\sigma(r)\sigma(r+e_1)\rangle$



On en déduit

$$\begin{aligned}\langle\sigma(r)\sigma(r+e_1)\rangle &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}{4\pi^2}\hat{G}_{12}(k)\,\mathrm{e}^{-ik_1}\\ &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2}{4\pi^2}\,\frac{c\left(s-\mathrm{e}^{-ik_1}\right)}{c^2-s\left(\cos\,k_1+\cos\,k_2\right)}\ .\end{aligned}$$

Pour des raisons de symétrie $\langle\sigma(r)\sigma(r+e_\alpha)\rangle$ ne dépend pas de α. Ceci se reflète dans la formule précédente si l'on échange k_1 et k_2 ou si l'on change leurs signes indépendamment. La formule que nous avons obtenue est thermodynamique, mais revenons au réseau fini $N \times N$ pour un instant. Pour les quantités qui nous intéressent, les conditions aux limites sont sans importance. Partant de

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-\beta E(\mathcal{C})}$$

on obtient $Z\langle E \rangle = -\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\beta}$ soit $\langle E \rangle = \frac{\mathrm{d}(\beta F)}{\mathrm{d}\beta}$.

D'autre part en utilisant la formule explicite de E et écrivant $\langle E \rangle = N^2 e$, $F = N^2 f$ on obtient à la limite thermodynamique

$$\begin{aligned}
\langle E \rangle &= -J \sum_r \langle \sigma(r) \left(\sigma\left(r + e_1\right) + \sigma\left(r + e_2\right)\right) \rangle \\
&= -\frac{J}{2} \sum_\alpha \sum_r \langle \sigma(r) \sigma\left(r + e_\alpha\right) \rangle \longrightarrow -\frac{JN^2}{2} \sum_\alpha \langle \sigma\left(r_0\right) \sigma\left(r_0 + e_\alpha\right) \rangle
\end{aligned}$$

où r_0 est un site fixé quelconque, donc

$$e = \frac{\mathrm{d}(\beta f)}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{J}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \frac{c\left(4s - 2\left(\cos\, k_1 + \cos\, k_2\right)\right)}{c^2 - s\left(\cos\, k_1 + \cos\, k_2\right)} \ .$$

De plus à température infinie ($\beta = 0$) $Z = 2^{N^2}$ donc $\lim\limits_{\beta \longrightarrow 0} \beta f = -\log\, 2$. Ceci permet de calculer f à partir de la formule précédente :

$$\beta f(\beta) = -\frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \log\, 4\left(c^2 - s\left(\cos\, k_1 + \cos\, k_2\right)\right) \ .$$

Finalement

$$\begin{aligned}
f(\beta) &= -\frac{1}{2\beta} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \log\, 4\left(\mathrm{ch}^2 2\beta J - \mathrm{sh}\ 2\beta J\left(\cos\, k_1 + \cos\, k_2\right)\right) \ , \\
e(\beta) &= -J \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \frac{\mathrm{ch}\ 2\beta J\left(2\ \mathrm{sh}\ 2\beta J - \left(\cos\, k_1 + \cos\, k_2\right)\right)}{\mathrm{ch}^2 2\beta J - \mathrm{sh}\ 2\beta J\left(\cos\, k_1 + \cos\, k_2\right)} \ .
\end{aligned}$$

La chaleur spécifique est par définition $-\beta^2 \mathrm{d}e/\mathrm{d}\beta$, et il n'est pas difficile de montrer que cette fonction contient une singularité logarithmique à la température β_c. Il y a plusieurs façons de procéder, mais nous allons en utiliser une qui est très caractéristique des méthodes de groupe de renormalisation : ces méthodes permettent de calculer les singularités des fonctions thermodynamiques à la température critique en utilisant la théorie continue. L'idée est la suivante. Pour $\beta \neq \beta_c$, la fonction à intégrer pour obtenir $e(\beta)$ est analytique et bornée sur le domaine d'intégration, donc $e(\beta)$ est analytique pour $\beta \neq \beta_c$. Si $k \neq 0$ l'intégrand est analytique en β, mais à $k = 0$ l'intégrand a un pôle simple à β_c car il vaut $\frac{c(2s-2)}{c^2-2s} = \frac{2c}{s-1}$. Ceci implique que la singularité éventuelle de $e(\beta)$ au voisinage de β_c est due au voisinage de l'origine dans le domaine d'intégration. Mais la région β proche de β_c, k petit est justement le domaine où, comme nous l'avons vu, la théorie admet une limite continue à condition d'ajuster l'échelle de k avec $\beta - \beta_c$. Comme la singularité en β est exactement à $k = 0$, on ne change pas cette singularité en passant à la limite continue. Alors la différence entre l'intégrand sur le réseau et l'intégrand à la limite continue est analytique en β même à β_c, donc on obtient toute la partie singulière de $e(\beta)$ en faisant une intégrale à la limite continue. Nous avons déjà remarqué que du fait de l'analyticité en β même à β_c de l'intégrand dans tout domaine ne contenant pas l'origine toute la singularité vient du voisinage immédiat de celle-ci. Si ceci était faux, il n'y aurait aucune chance de reproduire les singularités uniquement avec la limite continue, qui ne voit qu'un voisinage infinitésimal de l'origine. Retournant cet argument on peut changer le domaine d'intégration à sa convenance après le passage à la limite continue. On dispose même d'une plus grande flexibilité, comme nous le verrons après avoir explicitement mis en oeuvre les idées que nous venons de décrire, et plus encore dans les chapitres suivants.

Dans l'intégrand de $e(\beta)$, nous posons donc (pour passer à la limite continue) $k = qa$ avec $ma = 4(\beta - \beta_c) J$ et nous regardons la limite $a \longrightarrow 0$. Dans cette limite on a

$$\frac{c\,(2s - (\cos\, k_1 + \cos\, k_2))}{c^2 - s\,(\cos\, k_1 + \cos\, k_2)} \longrightarrow \frac{4ma}{(q^2 + m^2)\,a^2} = \frac{16\,(\beta - \beta_c)\,J}{k^2 + 16\,(\beta - \beta_c)^2\, J^2}\ .$$

Cette fonction est bien analytique en β le long de l'axe réel pour $k \neq 0$ et pour $k = 0$ elle a un pôle simple et se réduit à $\frac{1}{(\beta-\beta_c)J}$, qui est exactement la singularité de $\frac{2c}{s-1}$ à $\beta = \beta_c$. Il est facile de voir alors que

$$\frac{\mathrm{ch}\ 2\beta J\,(2\ \mathrm{sh}\ 2\beta J - (\cos\, k_1 + \cos\, k_2))}{\mathrm{ch}^2 2\beta J - \mathrm{sh}\ 2\beta J\,(\cos\, k_1 + \cos\, k_2)} - \frac{16\,(\beta - \beta_c)\,J}{k^2 + 16\,(\beta - \beta_c)^2\, J^2}$$

est une fonction analytique de β pour tout k du domaine d'intégration et intégrable en k. Donc

$$e_{sing}(\beta) = -J \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \frac{16\,(\beta - \beta_c)\,J}{k^2 + 16\,(\beta - \beta_c)^2\, J^2}$$

et $e(\beta)$ sont égales à une fonction analytique de β près. Comme seule l'origine compte, on peut changer le domaine d'intégration, et la partie singulière de $e(\beta)$ est aussi contenue dans

$$-J \int\int_{|k|\leq\pi} \frac{\mathrm{d}k_1 \mathrm{d}k_2}{4\pi^2} \frac{16\,(\beta - \beta_c)\,J}{k^2 + 16\,(\beta - \beta_c)\, J^2}\ .$$

En termes de théorie continue, on fait le changement de variable $k = qa$ et ceci transforme les singularités à petit k (dites infrarouges) en singularités à grand q (dites ultraviolettes) qui sont exactement les singularités de $\left\langle \psi_\alpha^{(R)}(r)\psi_{\alpha'}^{(R)}(0)\right\rangle$ quand $|r|$ est d'ordre a.

Passant en coordonnées polaires on obtient pour la partie singulière de $e(\beta)$ la forme

$$\frac{8\ J^2\,(\beta - \beta_c)}{\pi} \log \frac{1}{|\beta - \beta_c|\,J}\ .$$

Nous avons donc obtenu une image assez précise du lien entre corrélations à portée macroscopique, limite continue et singularités des fonctions thermodynamiques dans le cadre du modèle d'Ising à deux dimensions.

D. PERSPECTIVES

Nous voulons mentionner ici quelques leçons importantes qu'il faut tirer de ce premier chapitre. Nous allons insister sur les phénomènes que nous avons rencontrés et qui se généralisent aux cas plus compliqués. Certains points ont déjà été commentés au fur et à mesure, et nous les commenterons encore dans la suite. Nous espérons ne pas lasser le lecteur par ces redites. Il est nécessaire de bien s'imprégner des idées fondamentales. Elles sont profondes, difficiles peut-être, mais belles sans aucun doute. Elles ont révolutionné l'étude de transitions de phase, mais aussi la compréhension de la théorie des champs. Illustrons l'aspect transitions de phase. Considérons un modèle de mécanique statistique ayant un point de transition du second ordre. Le phénomène que nous avons observé dans nos deux exemples va se généraliser. Les singularités des quantités thermodynamiques au voisinage de la transition sont le signe de l'existence de corrélations à longue portée. La longueur de corrélation diverge au point critique. Ceci est le signe de l'existence d'une limite continue. Dans cette limite, le réseau disparaît. Techniquement on fait tendre simultanément la température vers la température critique (le rôle de la température peut être tenu par un autre paramètre en fait) et l'échelle des longueurs vers l'infini en unité de maille du réseau, de telle sorte que la longueur de corrélation tende vers une limite finie dans l'échelle macroscopique. Dans le même temps, comme nous l'avons vu, il faut changer la normalisation des fonctions de corrélation pour qu'elles aient une limite finie. Les fonctions de corrélation à la limite continue s'interprètent en terme de théories des champs euclidiennes. En faisant varier la longueur de corrélation macroscopique on décrit donc avec la limite continue un voisinage infinitésimal du point critique du point de vue de la théorie sur le réseau. Les singularités thermodynamiques au voisinage du point critique sont dues à des divergences infrarouges de fonctions de corrélation sur le réseau qui se réexpriment en termes de singularités ultraviolettes dans les fonctions de corrélation des champs de la théorie continue. Dans le cas où le modèle sur le réseau admet une théorie libre comme limite continue, cas qu'illustrent nos deux exemples, tout se calcule de façon assez explicite, et la théorie continue éclaire le contenu physique de la théorie sur le réseau. Cependant le modèle d'Ising montre bien que des surprises peuvent se produire. Certaines observables peuvent disparaître à la limite continue par exemple, ce qui montre que la théorie continue est vraiment plus simple que la théorie sur le réseau. Dans le cas d'une théorie en interaction, c'est beaucoup moins clair. Comme nous le verrons, les singularités à courte distance des produits d'opérateurs sont responsables de divergences. En effet l'interaction fait intervenir des produits d'opérateurs en un point. Il devient alors intéressant de discrétiser la théorie continue sur un réseau. Dans ce cadre tout est bien défini et on peut étudier (la plupart du temps de façon approchée à cause des difficultés techniques) le diagramme de phases de la théorie discrétisée et mettre en évidence l'existence d'une limite continue. Dans certains cas ceci fait apparaitre des phénomènes inattendus. De plus notons que le réseau est une des possibilités les plus commodes pour faire des simulations numériques. Les lois du passage à la limite continue permettent d'ajuster les paramètres sur le réseau pour reproduire la physique macroscopique que l'on désire étudier. Cette idée a beaucoup servi dans le cadre des théories de jauge.

II. PHENOMENES CRITIQUES ET THEORIE DES CHAMP SUR LE RESEAU

A. RETOUR AU MODELE D'ISING

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés à des problèmes exactement solubles et nous avons vu émerger un lien très étroit entre la mécanique statistique et la théorie des champs. Nous avons été capables de passer explicitement à la limite continue. Cependant les modèles susceptibles d'une description aussi fine sont rares. Malgré la simplicité de sa définition, le modèle d'Ising pour $d \neq 1, 2$ ne peut être étudié que de façon approchée. Nous allons voir que néanmoins le lien avec la théorie des champs est toujours présent.

1) Le modèle de spins couplés

Pour commencer, nous considérons N spins $\sigma_1, ..., \sigma_N$ valant ± 1. Nous choisissons pour l'énergie d'une configuration $\mathcal{C} = (\sigma_1, ..., \sigma_N)$

$$E(\mathcal{C}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij}\sigma_i\sigma_j - \sum H_i\sigma_i$$

où J_{ij} est une matrice symétrique à coefficients positifs. On remarque que les J_{ii} contribuent trivialement et on peut les supposer tous nuls (les changer revient à ajouter une constante à E). Les quantités H_i s'interprètent comme un champ magnétique. Il est clair que ce modèle est une généralisation du modèle d'Ising.

La fonction de partition est

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-\beta E(\mathcal{C})} .$$

Notre but est d'évaluer Z de façon approchée, avec un terme dominant et des corrections en principe calculables. Une idée naturelle est la suivante : comme Z est une somme de termes positifs, on obtient une approximation par défaut en ne gardant que les plus grands termes de la somme, et pour améliorer le résultat on peut espérer utiliser un analogue de la méthode du col.

L'aspect discret des variables du modèle d'Ising rend cette approche peu commode. Il existe un moyen simple de contourner cette difficulté.

2) Equivalence avec un modèle de spins indépendants couplés à un bruit gaussien

Le point de départ est l'identité algébrique suivante :

Si A_{ij} $(i, j \in [1, N])$ est une matrice on a

$$\begin{aligned} Z(y_i) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}x_i \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}x_ix_j + \sum_i x_iy_i} \\ &= (2\pi)^{N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{-1/2} \ \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum_{ij}\left(A^{-1}\right)_{ij} y_iy_j} . \end{aligned} \tag{1}$$

La preuve est élémentaire : dans le membre de droite on change x_i en $x_i + u_i$ (transformation de jacobien 1). On obtient

$$\begin{aligned} Z(y_i) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}x_i \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}A_{ij}(x_i+u_i)(x_j+u_j) + \sum_i (x_i+u_i)y_i} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}x_i \ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}x_ix_j - \frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}u_iu_j + \sum_i u_iy_i + \sum_i x_i\left(y_i - \sum_j A_{ij}u_j\right)} . \end{aligned}$$

On choisit alors les u_i pour que $y_i - \sum_j A_{ij}u_j = 0$, c'est-à-dire $u_i = \sum_j \left(A^{-1}\right)_{ij} y_j$. On obtient

$$Z\left(y_i\right) = Z(0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}u_i u_j + \sum_i u_i y_i}$$

soit (après élimination des u_i)

$$Z\left(y_i\right) = Z(0)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sum_{ij}\left(A^{-1}\right)_{ij} y_i y_j} \; .$$

Il reste à calculer $Z(0)$. Pour ce faire on diagonalise A_{ij} dans une base orthonormée. Le changement de variable a un jacobien égal à 1, donc

$$Z(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}x'_i \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_i \lambda_i x_i'^2}$$

où les λ_i sont les valeurs propres de A_{ij}. Donc

$$Z(0) = \prod_i \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x'_i \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda_i x_i'^2}\right) = \prod_i \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} = (2\pi)^{N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{-1/2} \; .$$

Ceci finit de démontrer (1). Dans la suite, nous utiliserons (1) de manière formelle, c'est-à-dire sans nous préoccuper du fait que A_{ij} est définie positive ou pas. On prend $y_i = \beta\sigma_i$ et $\sum_{ij}\left(A^{-1}\right)_{ij} y_i y_j = \sum_{ij} \beta J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ soit $\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{J_{ij}}{\beta}$. On obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}\phi_i \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j + \beta\sum_i \phi_i\sigma_i} = (2\pi)^{N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{-1/2}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j}$$

d'où

$$Z = (2\pi)^{-N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}\phi_i \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j} \prod_i \sum_{\sigma_i = \pm 1} \mathrm{e}^{\beta\sigma_i(H_i+\phi_i)} \; . \qquad (2)$$

Il est possible maintenant de faire explicitement la somme sur les spins σ, car dans (2) ils ne sont plus couplés entre eux. On obtient

$$Z = (2\pi)^{-N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}\phi_i \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j + \sum_i \log\ 2\ \mathrm{ch}\ \beta(H_i+\phi_i)} \; . \qquad (3)$$

(car $\sum_{\sigma=\pm 1}\exp(\sigma a) = \exp(\log\ 2\ \mathrm{ch}\ a)$. Comme nous le verrons dans la section suivante, la fonctionnelle

$$S(\phi) = \frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j - \sum_i \log\ 2\ \mathrm{ch}\ \beta\left(H_i + \phi_i\right)$$

joue le rôle d'une action.

Pour l'instant, nous n'avons fait aucune approximation, mais nous avons exprimé la fonction de partition initiale en termes de variables continues, plus maniables pour utiliser des méthodes de perturbations. Cette méthode s'adapte de façon évidente au cas où le spin est un vrai vecteur.

3) Equations du mouvement

Une intégrale est invariante par changement de variables. Par exemple dans (3) faisons la substitution $\phi_i \longrightarrow \phi_i + \varepsilon\delta_{i,i_0}$. La fonction Z ne change pas et on obtient

$$\begin{aligned} 0 &= (2\pi)^{N/2}(\text{Det } A)^{-1/2}\left(\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\prod_i \mathrm{d}\phi_i \left(-\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\phi_{i_0}}\right)\mathrm{e}^{-S(\phi)} \end{aligned}$$

ou encore comme i_0 est quelconque

$$\sum_j A_{ij}\left<\phi_j\right> = \left<\beta \text{ th } \beta\left(H_i + \phi_i\right)\right> \tag{4}$$

c'est-à-dire

$$\left<\phi_i\right> = \sum_j J_{ij}\left<\text{th } \beta\left(H_i + \phi_i\right)\right> \ .$$

Ces équations ont une interprétation très simple : si l'on oublie les valeurs moyennes, ce sont simplement les équations d'extremum pour

$$S(\phi) = -\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j + \sum_i \log\, 2 \text{ ch } \beta\left(H_i + \phi_i\right),$$

et ces équations décrivent la physique "classique" c'est-à-dire sans fluctuations thermiques (ou quantiques pour la théorie des champs). Il est possible d'établir des identités plus générales que (4) en faisant des changements de variables infinitésimaux plus compliqués sur les ϕ_i. Le contenu de ces identités est que, au sens de l'insertion dans les fonctions de corrélation, les équations "classiques" du mouvement sont valables.

Remarquons que par définition

$$\left<\sigma_i\right> = \frac{1}{\beta}\frac{\partial \log Z}{\partial H_i} = \left<\text{th } \beta\left(H_i + \phi_i\right)\right> \ .$$

Donc on en déduit de (4) la relation $\left<\phi_i\right> = \sum_i J_{ij}\left<\sigma_j\right>$. En conséquence, les valeurs moyennes de ϕ_i et σ_i sont reliées de façon simple. Dans le cas de forces à courte portée sur un réseau homogène ceci signifie que ϕ_i et σ_i décrivent la même physique. Attention, cette relation se complique si on regarde des valeurs moyennes de produits!

B. CHAMP MOYEN ET CORRECTIONS

Nous pouvons maintenant utiliser la méthode du col pour obtenir une valeur approchée de Z. Habituellement, la méthode du col fait intervenir un paramètre, et donne un développement asymptotique dans ce paramètre. Ici ce paramètre est caché, et nous procèderons de manière formelle. Il y a plusieurs interprétations possibles du paramètre. Lorsque nous calculerons les corrections au champ moyen nous verrons des indications du fait que notre développement est un développement en $1/d$ où d est la dimension de l'espace. Ceci a un sens physique mais l'interprétation est assez subtile. Nous allons indiquer un "truc" (très formel mais bien utile) relié au théorème de "limite centrale " des probabilités, pour introduire un paramètre de développement commode. Nous imaginons qu'en chaque site du réseau il y a non pas 1 mais n spins d'Ising $\sigma_i^{(\alpha)}$ avec $\alpha = 1, ..., n$. Nous notons $S_i = \sum_\alpha \sigma_i^{(\alpha)}$ et nous partons d'une énergie

$$E(\mathcal{C}) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{J_{ij}}{n}S_iS_j - \sum_i H_iS_i \ .$$

La fonction de partition associée est Z_n.

Il est clair que pour $n = 1$ on retrouve le modèle initial. On peut alors reprendre pas à pas les manoeuvres qui amènent à l'équation (3). De

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\beta\sum_{r,j}\frac{J_{ij}}{n}S_iS_j} = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{-N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_i \mathrm{d}\phi_i\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\sum_i A_{ij}\phi_i\phi_j+\beta\sum_i\phi_iS_i}$$

on déduit

$$Z_n = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{-N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_i \mathrm{d}\phi_i\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}n\sum A_{ij}\phi_i\phi_j}\prod_{i,\alpha}\sum_{\sigma_i^{(\alpha)}=\pm 1}\mathrm{e}^{\beta\sigma_i^{(\alpha)}(H_i+\phi_i)}$$

d'où finalement

$$Z_n = \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{-N/2}(\mathrm{Det}\ A)^{1/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_i \mathrm{d}\phi_i\ \mathrm{e}^{-n\ S(\phi)}$$

Lorsque n tend vers l'infini, Z_n peut être développé en utilisant la méthode du col, et $\frac{1}{n}$ est le paramètre de ce développement. Nous ne ferons pas mention explicite de n dans la suite, mais il est facile de le réintroduire pour se convaincre que c'est bien lui qui sert à ordonner les termes successifs que nous allons calculer.

1) Champ moyen

A l'ordre dominant nous négligeons les fluctuations et nous supposons donc que

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\prod_i \mathrm{d}\phi_i\ \mathrm{e}^{-S(\phi)} \sim \frac{1}{\beta^N}\mathrm{e}^{-S(\phi^*)}$$

où ϕ_i^* maximise $S(\phi)$, c'est-à-dire vérifie (cf. interprétation de (4))

$$\phi_i^* = \sum_j J_{ij}\ \mathrm{th}\ \beta\left(H_j + \phi_j^*\right) \ .$$

Le facteur $1/\beta^N$ est là pour des raisons dimensionnelles. Le lecteur remarquera l'analogie avec la discussion de la méthode de sommation sur toutes les trajectoires et la limite classique, c'est-à-dire avec l'intégrale de Feynman.

Ceci revient à négliger toutes les fluctuations thermiques. Dans ce cas la valeur moyenne d'une fonction est la fonction prise à la valeur moyenne. Si l'on pose $M_i = \langle \sigma_i \rangle$ on obtient $\phi_i^* = \sum_j J_{ij} M_j$. Donc dans les variables M_i on obtient

$$M_i = \operatorname{th} \beta \left(H_i + \sum_j J_{ij} M_j \right) . \tag{5}$$

Dans cette approximation, l'énergie libre $F = -\frac{1}{\beta} \log\, Z$ vaut

$$F_0 = \frac{N}{2\beta} \log\, 2\pi - \frac{1}{2\beta} \log\, \operatorname{Det} \left(\frac{A}{\beta^2} \right) + \frac{1}{2\beta} \sum_{ij} A_{ij} \phi_i^* \phi_j^* - \frac{1}{\beta} \sum_i \log\, 2\, \operatorname{ch} \beta \left(H_i + \phi_i^* \right) .$$

Notons que $\log\, \operatorname{Det} \frac{A}{\beta^2} = \operatorname{Tr}\, \log \frac{A}{\beta^2}$. L'indice 0 de F_0 indique que nous traitons l'approximation d'ordre 0. Les deux premiers termes ne contiennent pas le champ magnétique.

A une constante près, F_0 vaut donc

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} M_i M_j - \frac{1}{\beta} \sum_i \log\, 2\, \operatorname{ch} \beta \left(H_i + \sum_j J_{ij} M_j \right) .$$

Mais par définition

$$M_i = -\frac{\partial F}{\partial H_i} \left(\equiv \frac{1}{\beta} \frac{\partial \log\, Z}{\partial H_i} \right)$$

propriété équivalente à (5).

Ceci amène à définir une transformée de Legendre de F_0. On pose $-\Gamma(M_i) + F(H_i) = -\sum_i M_i H_i$ avec $M_i = -\frac{\partial F}{\partial H_i}$, d'où $H_i = \frac{\partial \Gamma}{\partial M_i}$. La fonction Γ_0 est bien adaptée aux problèmes que nous voulons discuter. En particulier, si $H_i = 0$ alors $\frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} = 0$ donc Γ est extremum en champ extérieur nul. Comme $\operatorname{ch} x = \sqrt{\frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x}}$ on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma_0 (M_i) \quad &= \frac{N}{2\beta} \log\, 2\pi + \frac{1}{2\beta} \operatorname{Tr}\, \log\, \beta J + \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} M_i M_j \\ &- \frac{N}{2} \log\, 2 + \frac{1}{2\beta} \sum_i \log \left(1 - \operatorname{th}^2 \beta \left(H_i + \sum_j J_{ij} M_j \right) \right) + \sum_i M_i H_i . \end{aligned}$$

De plus d'après (5)

$$\beta \left(H_i + \sum_j J_{ij} M_j \right) = \frac{1}{2} \log \left(\frac{1+M_i}{1-M_i} \right) . \tag{6}$$

Finalement

$$\begin{aligned} \Gamma_0 (M_i) \quad &= \frac{1}{2\beta} \operatorname{Tr}\, \log \frac{\pi \beta J}{2} - \frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} M_i M_j \\ &+ \frac{1}{2\beta} \sum_i \left[(1+M_i) \log (1+M_i) + (1+M_i) \log (1-M_i) \right] . \end{aligned} \tag{7}$$

Le dernier terme est un terme d'entropie. Remarquons que Γ_0 est pair en M_i.

Il est temps d'expliquer pourquoi dans ce contexte l'ordre dominant de la méthode du col s'appelle l'approximation du champ moyen. On repart de l'expression de Z comme

$$Z = \sum_{\sigma_1=\pm 1} \dots \sum_{\sigma_N=\pm 1} \mathrm{e}^{\beta\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_i H_i\sigma_i\right)} \ .$$

Le calcul de cette somme est compliqué à cause du couplage entre les spins. L'idée est d'approcher Z au mieux par la fonction de partition d'un système de spins indépendants. Notons

$$\begin{aligned} Z_0 &= \sum_{\sigma_1=\pm 1} \sum_{\sigma_N \pm 1} \mathrm{e}^{\beta \sum_i \bar{H}_i \sigma_i} \\ &= \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{\log\ 2\ \mathrm{ch}\ \beta\ \bar{H}_i} \ . \end{aligned}$$

On note $\langle\ \rangle_0$ les valeurs moyennes associées à Z_0. On obtient alors une identité algébrique

$$Z = Z_0 \left\langle \mathrm{e}^{\beta\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_i \left(H_i - \bar{H}_i\right)\sigma_i\right)} \right\rangle_0 \ .$$

Mais l'exponentielle est une fonction convexe donc la valeur moyenne de l'exponentielle d'une fonction est supérieure ou égale à l'exponentielle de la valeur moyenne de cette fonction (i.e. si les p_α sont tels que $\sum p_\alpha = 1$, $p_\alpha \geq 0$ et les x_α sont des réels arbitraires $\sum p_\alpha\ \mathrm{e}^{x_\alpha} \geq \mathrm{e}^{\sum p_\alpha x_\alpha}$). Donc

$$Z \geq Z_0 \exp \left\langle \beta \left(\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j + \sum_i \left(H_i - \bar{H}_i\right)\sigma_i \right) \right\rangle_0 \ .$$

Mais pour $\langle\ \rangle_0$ les spins σ_i sont indépendants donc $\langle\sigma_i\sigma_j\rangle_0 = \langle\sigma_i\rangle_0 \langle\sigma_j\rangle_0$ pour $i \neq j$. Comme $J_{ii} = 0$ on trouve

$$Z \geq Z_0 \mathrm{e}^{\beta\left(\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij} M_i M_j + \sum_i \left(H_i - \bar{H}_i\right) M_i\right)}$$

où

$$M_i = \langle\sigma_i\rangle_0 = \mathrm{th}\ \beta\ \bar{H}_i \ . \tag{8}$$

L'idée est d'approcher Z au mieux en maximisant le membre de droite par le choix approprié de $\bar{H}_i$.

On cherche donc à maximiser

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} M_i M_j + \sum_i \left(H_i - \bar{H}_i\right) M_i + \frac{1}{\beta} \sum_i \log\ 2\ \mathrm{ch}\ \beta\ \bar{H}_i$$

c'est-à-dire à minimiser l'énergie libre avec la contrainte (8). Le plus simple est de rajouter des paramètres de Lagrange et de chercher les extrema de

$$\frac{1}{2} \sum_{ij} J_{ij} M_i M_j + \sum_i \left(H_i - \bar{H}_i\right) M_i + \frac{1}{\beta} \sum_i \log\ 2\ \mathrm{ch}\ \beta\ \bar{H}_i + \sum_i \lambda_i \left(M_i - \mathrm{th}\ \beta\ \bar{H}_i\right)$$

en considérant les M_i, $\bar{H}_i$ et λ_i comme des variables indépendantes. Les conditions d'extremum donnent

$$\lambda_i = 0 \qquad M_i = \text{th}\, \beta\, \bar{H}_i \qquad \bar{H}_i = \sum_j J_{ij} M_j + H_i \ .$$

Nous retrouvons donc exactement les équations précédentes pour l'aimantation M_i. Ce que nous avons fait est de trouver le champ magnétique effectif $\bar{H}_i$ qui reproduit le mieux la fonctionnelle d'énergie initiale. Ceci revient à remplacer $\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}\sigma_i\sigma_j$ par $\sum_{ij} J_{ij} M_j \sigma_i$ où M_j est fixé par la cohérence de l'approximation. On remplace donc l'interaction entre spins par un champ moyen sans fluctuations.

Cette façon de procéder est très intuitive mais elle ne se prête pas bien à un calcul systématique de corrections. C'est pourquoi nous utilisons des variables continues.

2) Premières corrections

Dans un premier temps nous avons remplacé l'intégrale de

$$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j + \sum_i \log\, 2\, \text{ch}\, \beta(H_i+\phi_i)}$$

par le maximum de cette fonction. Dans l'esprit de la méthode du col, le pas suivant consiste à garder les fluctuations quadratiques autour du maximum. On écrit donc $\phi_i = \phi_i^* + \varphi_i$

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i\phi_j + \sum_i \log\, 2\, \text{ch}\, \beta\,(H_i+\phi_i) = \\
&-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\phi_i^*\phi_j^* + \sum_i \log\, 2\, \text{ch}\, \beta\,(H_i+\phi_i^*) \\
&-\frac{1}{2}\sum_{ij} A_{ij}\varphi_i\varphi_j + \sum_i \frac{\beta^2}{2}\left(1-\text{th}^2\beta\,(H_i+\phi_i^*)\right)\varphi_i^2 + \text{ ordre supérieur } .
\end{aligned}$$

Il n'y a pas de termes d'ordre 1 en φ_i car ϕ_i^* est le maximum. On écrit donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_i \mathrm{d}\phi_i\ \mathrm{e}^{-S(\phi)} \sim \frac{1}{\beta^N}\mathrm{e}^{-S(\phi^*)} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta^N \prod_i \mathrm{d}\varphi_i\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{i,j} B_{ij}\varphi_i\varphi_j}$$

où

$$B_{ij} \equiv \frac{\partial^2 S}{\partial\phi_i\partial\phi_j}(\phi^*) = A_{ij} - \beta^2\left(1-\text{th}^2\beta\,(H_i+\phi_i^*)\right) S_{ij} \ .$$

Nous avons vu comment calculer cette intégrale gaussienne, qui est reliée à un déterminant. L'intégrale vaut

$$(2\pi)^{N/2}\left(\text{Det}\left[A_{ij} - \beta^2\left(1-\text{th}^2\beta\,(H_i+\phi_i^*)\right)\delta_{ij}\right]\right)^{-1/2}\beta^N \ .$$

La contribution à l'énergie libre est donc

$$-\frac{N}{2\beta}\log\, 2\pi + \frac{1}{2\beta}\log\, \text{Det}\frac{B}{\beta^2} \ .$$

Pour séparer les différents ordres d'approximation on introduit un paramètre formel z jouant le rôle de $\frac{1}{n}$ (à la fin on fait $z = 1$). On écrit donc

$$F = F_0 + zF_1 + ... \quad , \qquad \Gamma = \Gamma_0 + z\Gamma_1 + ...$$

avec la relation

$$\Gamma(M_i, z) = F(H_i, z) + \sum_i H_i M_i$$

et toujours

$$\frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} = H_i \quad , \qquad \frac{\partial F}{\partial H_i} = -M_i \ .$$

Ceci implique $\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial z}\right|_{M_i} = \left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{H_i}$ donc $\Gamma_1 = F_1$. Donc

$$\begin{aligned}
\Gamma(M_i) \quad &= \frac{1}{2\beta}\mathrm{Tr}\,\log\frac{\pi\beta J}{2} - \frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}M_iM_j \\
&+\frac{1}{2\beta}\sum_i \left[(1+M_i)\log(1+M_i) + (1-M_i)\log(1-M_i)\right] \\
&+z\left(-\frac{N}{2\beta}\log\,2\pi + \frac{1}{2\beta}\mathrm{Tr}\,\log\frac{B}{\beta^2}\right) \ .
\end{aligned}$$

De plus $M_i = \mathrm{th}\,\beta(H_i + \phi_i^*) + ...$ donc à cet ordre d'approximation on peut remplacer B_{ij} par

$$A_{ij} - \beta^2\left(1 - M_i^2\right)\delta_{ij}.$$

D'où finalement (faisant $z = 1$)

$$\begin{aligned}
\Gamma(M_i) \quad &= -\frac{1}{2}\sum_{ij} J_{ij}M_iM_j + \frac{1}{2\beta}\sum_i \left[(1+M_i)\log(1+M_i) + (1-M_i)\log(1-M_i)\right] \\
&+\frac{1}{2\beta}\mathrm{Tr}\,\log\left(\frac{\delta_{ij} - \left(1 - M_i^2\right)\beta\,J_{ij}}{4}\right) + ...
\end{aligned} \tag{9}$$

On remarque à nouveau que Γ est paire en M_i.

Suivant le même principe, il est possible de calculer, plus ou moins explicitement, des corrections d'ordre supérieur.

Avant de passer à l'interprétation physique des formules (7) et (9), nous allons montrer l'existence d'un développement diagrammatique pour les fonctions de corrélation, et trouver l'équivalent des règles de Feynman de la théorie des champs.

C. REGLES DE FEYNMAN

Pour calculer les premières corrections nous avons décomposé ϕ_i en la somme de ϕ_i^*, qui maximise le poids de Boltzmann, et sa fluctuation φ_i. Nous avons retenus les termes jusqu'à l'ordre 2 en φ_i. De façon plus générale on peut écrire

$$S(\phi) = S(\phi^*) + \frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}\varphi_i\varphi_j + \sum_i V_i(\varphi_i)$$

où V_i est une fonction de φ dont les coefficients de Taylor dépendent des H_j explicitement mais aussi implicitement par le champ extrémal ϕ_i^*. La fonction $V_i(\varphi)$ commence à l'ordre 3 en φ.

On utilise alors l'identité algébrique

$$\begin{aligned}&\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\varphi_i \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}\varphi_i\varphi_j - \sum_i V_i(\varphi_i) + \sum_i C_i\varphi_i} \\ &\quad = \mathrm{e}^{-\sum_i V_i\left(\frac{\partial}{\partial C_i}\right)} \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}\varphi_i\varphi_j + \sum_i C_i\varphi_i} .\end{aligned} \tag{10}$$

Cette identité doit être comprise au sens d'un développement asymptotique dans les coefficients des potentiels V_i, et se vérifie donc en identifiant terme à terme les deux membres, par application répétée de la propriété évidente

$$\begin{aligned}&\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\varphi_i F(\varphi_1, ..., \varphi_N)\, \varphi_k \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}\varphi_i\varphi_j + \sum_i C_i\varphi_j} \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial C_k} \int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\varphi_i F(\varphi_1, ..., \varphi_N)\, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}\varphi_i\varphi_j + \sum_i C_i\varphi_i} .\end{aligned}$$

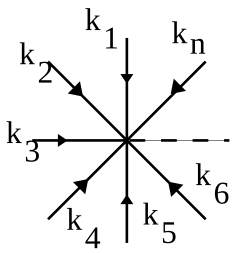
Mais l'intégrale dans le second membre de (10) est gaussienne et on obtient finalement

$$\begin{aligned}&\int \prod_{i=1}^{N} \mathrm{d}\varphi_i \; \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} B_{ij}\varphi_i\varphi_j - \sum_i V_i(\varphi_i) + \sum_i C_i\varphi_i} \\ &\quad = \left(\mathrm{Det}\frac{B}{2\pi}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-\sum_i V_i\left(\frac{\partial}{\partial C_i}\right)} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum_{ij} C_i \left(B^{-1}\right)_{ij} C_j} .\end{aligned} \tag{11}$$

Cette formule permet de calculer l'intégrale initiale comme une série asymptotique dans les coefficients des fonctions V_i. On écrit

$$V_i(\varphi) = \sum_{n=3}^{\infty} \lambda_n^{(i)} \frac{\varphi^n}{n!} .$$

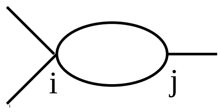
Si on représente diagrammatiquement $\left(B^{-1}\right)_{ij}$ par une ligne et $\lambda_n^{(i)} \frac{\varphi^n}{n!}$ par



on obtient une interprétation diagrammatique des termes apparaissant dans (11). Le premier dessin s'appelle un propagateur et le second un vertex. Le rôle des polynômes en $\frac{\partial}{\partial C_i}$ appliqués à un polynôme en $C_j \left(B^{-1}\right)_{jk} C_k$ est d'accrocher les pattes de vertex de type i à des extrémités de type i de propagateurs. L'expression (11) est alors donnée par toutes les manières d'accrocher des vertex à des propagateurs, ce qui en langage opératoriel de la théorie des champs correspond à des contractions. Ainsi la combinatoire des intégrales gaussiennes reproduit la combinatoire du théorème de Wick. Chaque système de contractions est associée à un diagramme, mais pour que la correspondance soit complète, à chaque diagramme est affecté un nombre de symétrie, qui est le nombre de manières distinctes d'obtenir ce graphe par des contractions. Nous n'insistons pas sur ce point pour l'instant mais nous verrons des exemples plus tard. Il est possible de montrer que pour obtenir le logarithme de (11) il ne faut considérer que les diagrammes connexes. Pour donner un exemple, le développement de (11) fait apparaître un terme

$$\sum_{k,\ell,m} \lambda_4^{(i)} \lambda_3^{(j)} C_k C_\ell C_m \left(B^{-1}\right)_{ik} \left(B^{-1}\right)_{i\ell} \left(B^{-1}\right)_{jm} \left(B^{-1}\right)_{ij} \left(B^{-1}\right)_{ij}$$

auquel on associe le diagramme suivant :



Le lecteur est invité à faire d'autres exemples.

Après toutes ces considérations formelles nous pouvons commencer à interpréter physiquement les résultats que nous avons obtenus.

D. INTERPRETATION PHYSIQUE DANS LE CAS HOMOGENE

Dans le cas où la famille des couplages J_{ij} et des champs magnétiques H_i possède suffisamment de symétries, il est possible de simplifier nos résultats. Notre but est d'étudier des systèmes de spins sur un réseau infini ou sur une portion finie de réseau avec conditions aux limites périodiques. On suppose le système invariant par translation auquel cas tous les spins jouent des rôles équivalents, à condition que le champ magnétique extérieur soit uniforme. Nous supposons donc qu'un sous groupe G du groupe des permutations de $[1, N]$ suffisamment grand en un sens que nous allons préciser, est un groupe de symétrie du problème. On demande donc que pour toute permutation σ dans G on ait $J_{ij} = J_{\sigma(i)\sigma(j)}$ et $H_i = H_{\sigma(i)}$. Pour que ceci rende les spins tous équivalents, il faut encore que si i et j sont deux sites donnés, il existe une transformation σ dans G telle que $\sigma(i) = j$ (on dit que G agit transitivement sur les sites). Dans ce cas le champ magnétique est uniforme, et on peut chercher pour (7) et (9) des solutions uniformes (c'est-à-dire où l'aimantation M ne dépend pas du site).

On a alors $\Gamma(M) = F(H) + NHM$ d'où $\gamma(M) = f(H) + HM$ (on a posé $\gamma(M) = \frac{1}{N}\Gamma(M)$ et $f(H) = \frac{1}{N}F(H)$).

1) Exposants du champ moyen

A l'ordre dominant, nous pouvons utiliser l'équation (7). A un terme constant près $\gamma_0(M)$ vaut (on pose $\sum_i J_{ij} = J$ indépendant de j)

$$-\frac{1}{2}J\ M^2 + \frac{1}{2\beta}\left[(1+M)\log(1+M) + (1-M)\log(1-M)\right]$$

et le lien entre M et H est , d'après (5) et (6)

$$M = \text{th}\ \beta(H + JM) \quad \text{i.e.} \quad H = -JM + \frac{1}{2\beta}\log\frac{1+M}{1-M} = \frac{\partial \gamma_0}{\partial M}\ .$$

De plus

$$\frac{\partial^2 \gamma_0}{\partial M^2} = -J + \frac{1}{\beta\,(1-M^2)}\ .$$

On se souvient d'autre part que par hypothèse, βJ est positif. Pour $H = 0$ on cherche le minimum (stable) de γ_0. Tant que $\beta J \leq 1$, l'équation $M = \text{th}\ \beta J M$ a pour seule solution 0, qui est bien le minimum absolu de γ_0. Pour $\beta J > 1$ la solution $M = 0$ devient instable et deux solutions stables apparaissent. Si βJ est très légèrement supérieur à 1, les solutions stables sont voisines de $M = 0$ et on peut développer $\gamma_0(M) = \frac{1}{2\beta}\left[(1-\beta J)M^2 + \frac{1}{6}M^4 + ...\right]$. On définit β_c par $\beta_c J = 1$ et on obtient

$$\frac{\beta_c - \beta}{\beta} JM + \frac{1}{3\beta}M^3 \simeq 0$$

d'où

$$\begin{array}{lll} M = 0 & \text{instable} & \gamma_0 = 0 \\ M \simeq \pm\sqrt{\dfrac{3\,(\beta - \beta_c)}{\beta_c}} & \text{stable} & \gamma_0 \simeq -\dfrac{3}{4\beta_c^3}\left(\beta_c - \beta\right)^2\ . \end{array}$$

Pour $\beta \leq \beta_c$, il n'y a pas d'aimantation spontanée, pour $\beta > \beta_c$ une aimantation spontanée apparaît, avec une singularité en $\sqrt{\beta - \beta_c}$. Nous voyons que l'aimantation spontanée implique une brisure de symétrie entre M et $-M$. Ceci est une caractéristique générale des transitions du second ordre.

On définit un exposant β (rien à voir avec l'inverse de la température) par $M \simeq \pm (T_c - T)^\beta$. Pour le champ moyen nous venons de voir que cet exposant vaut $\beta = \frac{1}{2}$. Nous allons définir d'autres exposants. Ils sont appelés exposants critiques, car ils décrivent les singularités des propriétés physiques du système au voisinage de la température critique.

Note : Bien sûr rien ne dit a priori que les singularités au point critique sont des lois de puissance. Mais ces singularités sont les plus simples qu'on puisse imaginer. Nous verrons plus loin des arguments généraux liés aux propriétés d'invariance d'échelle qui expliquent que les singularités soient de ce type : les lois de puissance sont les seules compatibles avec l'absence d'échelle de longueur autre que la longueur de corrélation qui diverge à T_c.

On définit la variable réduite $t = \frac{\beta_c - \beta}{\beta_c}$.

Les exposants α et α' décrivent la singularité de $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}$ pour $\beta < \beta_c$ et $\beta > \beta_c$ respectivement.

Pour le champ moyen $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \simeq 0$ si $\beta < \beta_c$ et $\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2} \simeq -\frac{3}{2\beta_c}$ si $\beta > \beta_c$. Il y a donc une simple discontinuité à $\beta = \beta_c$ et on obtient $\alpha = \alpha' = 0$. De même γ et γ' (à nouveau rien à voir avec $\gamma(H)$) décrivent la singularité de $\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}\right)_{H=0}$ pour $\beta < \beta_c$ et $\beta > \beta_c$ respectivement. Le champ moyen prédit $\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}\right)_{H=0} \simeq t^{-1}$ si $\beta < \beta_c$ et $\left(\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}H}\right)_{H=0} \simeq \frac{1}{2}(-t)^{-1}$ si $\beta > \beta_c$. Donc $\gamma = \gamma' = 1$. Ceci est une conséquence directe de $\mathrm{d}H = \left(-\frac{1}{\beta_c} + \frac{1}{\beta(1-M^2)}\right)\mathrm{d}M$. Enfin l'exposant δ décrit la relation en H et M au point critique $H \sim M^\delta$. Pour le champ moyen on obtient $H \simeq \frac{1}{3\beta_c} M^3$ d'où $\delta = 3$. Nous avons déjà dit qu'au point de transition des corrélations de portée infinie étaient présentes. Il y a aussi un exposant, noté ν, qui caractérise la divergence de la longueur de corrélation quand β tend vers β_c.

Nous venons en fait de retrouver les résultats de la théorie de Landau.

Il est instructif de comparer ces résultats avec les résultats exacts ou expérimentaux connus. Comme nous l'avons vu dans l'introduction, le modèle à un nombre fini de spins ne peut pas avoir de transition de phase et $\lim\limits_{H \longrightarrow 0^+} M = \lim\limits_{H \longrightarrow 0^-} M = 0$. L'approximation du champ moyen ne respecte pas ce résultat exact, car elle crée des corrélations fortes entre les spins. Cependant on pourrait imaginer (et c'est le cas dans certaines circonstances, que nous décrirons par la suite) que dans la limite $N \longrightarrow \infty$, le résultat du champ moyen soit quand même correct. Une caractéristique très importante des résultats du champ moyen est leur universalité : les couplages J_{ij} n'interviennent que pour fixer la température critique. Ensuite dans le développement de $(1+M)\log(1+M) + (1-M)\log(1-M)$ seuls comptent les deux premiers termes (ceux en M^2 et M^4). On imagine donc que beaucoup de modèles ont les mêmes exposants dans l'approximation du champ moyen. Si les spins sont situés aux noeuds d'un réseau, la dimension de celui-ci n'a pas d'influence sur les exposants. Dans le I.C nous avons montré que pour le modèle d'Ising à deux dimensions avec couplages de proches voisins, la chaleur spécifique diverge logarithmiquement à la température critique alors que le champ moyen prédit une discontinuité. Les autres résultats d'Onsager permettent d'obtenir exactement $\beta = \frac{1}{8}$ (au lieu de $\frac{1}{2}$), $\gamma = \gamma' = \frac{7}{4}$ (au lieu de 1). Ainsi le champ moyen donne des résultats incorrects du point de vue quantitatif.

Lorsque $d = 3$ le modèle d'Ising avec couplages de proches voisins n'est plus soluble exactement mais on peut calculer approximativement les exposants par des développements en série de haute température. On obtient pour γ une valeur de l'ordre de $1,25$ avec une précision excluant à la fois le champ moyen et les résultats exacts pour $d = 2$. Ceci montre que le champ moyen est trop universel et que les exposants critiques dépendent de la dimension. Cependant les résultats qualitatifs du champ moyen sont tout à fait remarquables, car ils sont obtenus par des méthodes très élémentaires. De plus le concept d'universalité s'est révélé très fructueux. C'est un fait expérimental que de nombreux systèmes physiques apparemment très différents ont les mêmes exposants critiques. La température critique et la normalisation des fonctions de corrélation par exemple, dépendent fortement du détail des interactions microscopiques (type de réseau, valeur des couplages, etc...). Mais les exposants ne dépendent pas de ces détails. Ceci rappelle les modèles très simples que nous avons résolus exactement au Chapitre I. Ainsi les exposants des matériaux ferro-magnétiques sont-ils les mêmes. On pense même que les exposants pour la transition liquide-gaz au point critique sont les mêmes que ceux du modèle d'Ising. Cette similitude a l'explication naïve suivante. La boîte contenant les molécules est subdivisée en un réseau régulier dont la maille est de l'ordre de la distance d'équilibre d_0, qui est la distance à laquelle le potentiel entre deux molécules est minimal et vaut $-V_0$. Chaque cellule contient au maximum une molécule, et on fait l'hypothèse que les molécules se déplacent de centre de cellule en centre de cellule. Deux molécules occupant des cellules voisines contribuent à une énergie potentielle d'ordre $-V_0$. On ne conserve que les interactions de proches voisins. Il est facile de voir que ce modèle ultra simplifié est équivalent à une constante additive près à un modèle d'Ising. Ceci n'est bien sûr pas une preuve. Toutes ces considérations montrent que le champ moyen n'est pas une trop mauvaise base pour comprendre les phénomènes critiques.

2) Premières corrections

Nous allons maintenant voir comment les considérations précédentes sont modifiées lorsqu'on tient compte des corrections au champ moyen.

La formule (9) donne

$$\begin{aligned}\gamma(M) &= -\frac{1}{2}J\ M^2 + \frac{1}{2\beta}\left[(1+M)\log(1+M) + (1-M)\log(1+M)\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\beta N}\mathrm{Tr}\ \log\left(\frac{\delta_{ij} - \left(1-M^2\right)\beta\ J_{ij}}{4}\right) + \ldots\end{aligned}$$

Le dernier terme fait intervenir le spectre de la matrice J_{ij}. Notant λ_i les valeurs propres on obtient

$$\begin{aligned}\gamma(M) &= -\frac{1}{2}J\ M^2 + \frac{1}{2\beta}\left[(1+M)\log(1+M) + (1-M)\log(1-M) - \log 4\right] \\ &\quad + \frac{1}{2\beta N}\sum_{i=1}^{N}\log\left(1 - \left(1-M^2\right)\beta\ \lambda_i\right) + \ldots\end{aligned} \tag{12}$$

Il est temps maintenant d'être plus explicite quant à la disposition de nos N spins. Pour rester simples nous les prenons sur un réseau fini de $N = L^d$ sites avec conditions aux limites périodiques dans les d directions, nous supposons que J_{ij} ne dépend que de $i - j$ (on identifie i et j à des éléments de groupe additif $(\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^d$). On peut alors diagonaliser explicitement J_{ij}, en utilisant la transformation de Fourier finie. Si $i = (i_1, ..., i_d)$ avec $i_1, ..., i_d \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ et $k = (k_1, ..., k_d)$ avec $k_1, ..., k_d \in \mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$ on note $ik = i_1 k_1 + ... + i_d k_d$ qui est un élément bien défini de $\mathbb{Z}/L\mathbb{Z}$. On définit

$$\tilde{J}_{k\ell} = \frac{1}{N}\sum_{ij} J_{ij}\xi^{ik-j\ell}$$

où ξ est une racine primitive $L^{\text{ième}}$ de l'unité. Comme J_{ij} ne dépend que de $i-j$ on peut écrire

$$\begin{aligned}\tilde{J}_{k\ell} &= \frac{1}{N}\sum_i\sum_j J_{i,i+j}\xi^{ik-(i+j)\ell} = \frac{1}{N}\sum_j J_{0,j}\xi^{-j\ell}\sum_i \xi^{i(k-\ell)} \\ &= \delta_{k\ell}\sum_j J_{0,j}\xi^{-j\ell}\end{aligned}$$

car la somme sur i vaut 0 sauf si $k=\ell$.

Comme la transformation de Fourier est unitaire, les valeurs propres de la matrice J_{ij} sont données par $\lambda_\ell = \sum_j J_{0,j}\xi^{-j\ell}$ pour $\ell \in (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^d$. Comme J_{ij} est symétrique ses valeurs propres sont réelles et comme J_{ij} est réelle ses valeurs propres sont paires en ℓ donc $\lambda_\ell = \bar{\lambda}_\ell = \lambda_{-\ell}$. Dans la suite nous supposons également que les d directions sont équivalentes, c'est-à-dire que si $\tilde{\imath}$ est obtenu en permutant les composantes de $i \in (\mathbb{Z}/L\mathbb{Z})^d$, ou en changeant certains signes alors $J_{0,\tilde{\imath}} = J_{0i}$. Il est très facile dans (12) de passer à la limite $N \longrightarrow \infty$. Le terme contenant le logarithme est une somme de Riemann. On obtient

$$\begin{aligned}\gamma(M) &= -\frac{1}{2}J\ M^2 + \frac{1}{2\beta}\left[(1+M)\log(1+M) + (1-M)\log(1-M) - \log 4\right] \\ &+ \frac{1}{2\beta}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\log\left(1-\left(1-M^2\right)\beta\ \lambda(k)\right)\end{aligned} \tag{13}$$

où

$$\lambda(k) = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} J_{0j}\ \mathrm{e}^{-ikj} = \sum_{j\in\mathbb{Z}^d} J_{0j}\ \cos\ k_j\ .$$

Dans un matériau réel, nous nous attendons en général à des corrélations à courte portée, décroissant vite avec la distance. Ceci implique que $\lambda(k)$ a certaines propriétés de régularité. Lorsque k est petit, on peut alors écrire :

$$\lambda(k) = J - k^2 J' + O\left(\left(k^2\right)^2\right)$$

où comme d'habitude $J = \sum_j J_{0,j}$, et $J' = \frac{1}{2d}\sum_j J_{0j}j^2$.

Notons que pour obtenir J' nous avons utilisé les symétries des couplages. Notons aussi que demander que J' soit fini est une expression quantitative du fait que les couplages sont à courte portée. On pourrait imaginer des systèmes fortement corrélés où une telle contrainte n'est plus satisfaite. Il est possible d'adapter la discussion qui va suivre à de tels cas mais c'est plus compliqué, et nous nous contenterons du cas le plus simple dans la suite.

Pour le modèle d'Ising avec couplage de proches voisins $J/2d$ on obtient

$$\lambda(k) = \frac{J}{d}\sum_{\alpha=1}^{d}\cos\ k_\alpha$$

d'où $J' = \frac{J}{2}$.

Nous sommes maintenant en mesure de discuter dans quels cas (13) modifie fondamentalement les résultats du champ moyen. Lorsque β est très petit le terme dominant est le terme d'entropie, et $M=0$ donne le minimum stable de $\gamma(M)$. Nous définissons donc β_c comme la valeur de l'inverse de la température pour laquelle $\frac{\partial^2\gamma}{\partial M^2}$ s'annule en $M = 0$. Ceci revient à dire que la susceptibilité $\chi = \left(\frac{\partial M}{\partial H}\right)$ diverge, car $\frac{\partial \gamma}{\partial M} = H$. Pour bien comprendre ce qui se passe, il est utile de réintroduire le paramètre formel de développement z devant l'intégrale dans (13). On obtient

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial M^2}\right)_{M=0} = -J + \frac{1}{\beta} + z\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(k)}{1-\beta\lambda(k)} + \ldots$$

et on définit β_c par

$$0 = -J + \frac{1}{\beta_c} + z\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(k)}{(1-\beta_c\lambda(k))} + \ldots$$

Si notre théorie des perturbations a un sens, nous nous attendons à ce que β_c ait un développement en z, ce qui signifie que sous le signe intégrale on peut remplacer β_c par sa valeur à l'ordre 0, c'est-à-dire $\frac{1}{J}$.

La différence des deux équations donne alors

$$\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial M^2}\right)_{M=0} = (\beta_c - \beta)\left(\frac{1}{\beta\beta_c} - z\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(k)^2}{(1-\beta\lambda(k))\left(1-\frac{1}{J}\lambda(k)\right)} + \ldots\right)$$

où β_c est fixé par

$$0 = -J + \frac{1}{\beta_c} + z\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(k)}{\left(1-\frac{1}{J}\lambda(k)\right)} + \ldots$$

La question est maintenant : dans quelles circonstances les intégrales ci-dessus ont-elles un sens ? Les domaines d'intégration sont bornés, et $\lambda(k)$ est une fonction régulière, donc les problèmes de convergence viennent des singularités de $1 - \frac{1}{J}\lambda(k) = \frac{J'}{J}k^2 + \mathcal{O}\left(\left(k^2\right)^2\right)$. Ceci montre que si $d \le 2$ la correction du premier ordre à la température critique est infinie. Ceci est une manifestation de l'absence de transition pour $d \le 2$. Le champ moyen prédit une transition, mais les fluctuations sont très importantes et détruisent l'ordre à grande distance. Il faut préciser ce point. En fait, comme nous l'avons vu, pour $d = 2$ le modèle d'Ising, dont la symétrie est discrète, a une transition de phase avec brisure de symétrie. Mais les modèles analogues où le spin est un vecteur à plus d'une composante et dont la symétrie est un groupe continu n'ont pas de transition pour $d = 2$. Le développement autour du champ moyen ne permet pas de distinguer cette nuance importante. Même si $d > 2$, lorsque $\beta \longrightarrow \beta_c$ l'intégrale contribuant à la susceptibilité contient une singularité en $\frac{1}{(k^2)^2}$, et diverge si $d \le 4$. Par contre si $d > 4$ les corrections à β_c sont finies et la susceptibilité diverge avec un exposant $\gamma = 1$ inchangé par rapport à l'approximation d'ordre zéro.

Ces conclusions subsistent aux ordres suivants du développement autour du col. Si $d > 4$ les corrections à la température critique sont finies, et les exposants du champ moyen ne sont pas modifiés par les corrections. Ainsi le champ moyen donne les exposants critiques exacts pour le modèle d'Ising en dimension plus grande que 4.

Par contre si $d \le 4$, le développement en fluctuations autour du champ moyen n'a aucun sens. Même si l'on n'introduisait pas le paramètre artificiel z (auquel cas il faudrait expliquer en quel sens il est raisonnable de faire des calculs en ne gardant qu'un nombre fini de termes) et qu'on ne se permette donc pas de remplacer β_c par $\frac{1}{J}$ sous le signe somme, le résultat serait que les premières corrections seraient forcément grandes par rapport à l'approximation d'ordre 0, et cela n'irait pas en s'arrangeant aux ordres suivants.

Nous sommes donc placés devant un problème difficile dont la solution est un des plus grands succès de la physique moderne. Les idées nouvelles introduites dans ce contexte se sont révélées très profondes et ont eu un impact qu'il serait difficile de surestimer sur la vision que nous avons aujourd'hui de la théorie des champs dans ses aspects les plus fondamentaux.

La première remarque importante est que les exposants critiques du champ moyen sont de purs nombres, qui ne dépendent pas des détails de la fonction $\gamma_0(M)$ mais seulement du fait que $\gamma_0(M)$ s'écrit $a(\beta)M^2 + b(\beta)M^4$ pour M petit et que $a(\beta)$ s'annule pour une valeur β_c telle que $b(\beta_c) \neq 0$. La valeur de β_c, elle, dépend des détails de la fonction $a(\beta)$. De même les divergences de la première correction ne dépendent pas des détails de la fonction $\lambda(k)$, mais juste du fait que $1 - \frac{1}{J}\lambda(k)$ se comporte en k^2 pour k petit, donc des singularités infrarouges. De plus ces singularités infrarouges peuvent se réinterpréter comme des singularités ultraviolettes en introduisant une maille a pour le réseau :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(k)^2}{(1-\beta\lambda(k))\left(1-\frac{1}{J}\lambda(k)\right)} = a^d \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{\lambda(qa)^2}{(1-\beta\lambda(qa))\left(1-\frac{1}{J}\lambda(qa)\right)} \ .$$

On peut alors ajuster β et a pour que $m^2 = \frac{1-\beta J}{\beta J' a^2}$ reste fixé quand a tend vers 0, i.e. β tend vers β_c. Pour $2 < d \leq 4$, la singularité dominante est donné par

$$\frac{J^4}{J'^2} a^{d-4} \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^4} \frac{1}{(q^2+m^2)\, q^2}$$

et en particulier pour $d = 4$ la divergence logarithmique est devenue une divergence ultraviolette. Nous admettons que ceci reste vrai pour les corrections d'ordre supérieur. Ainsi pour $d = 4$ on peut s'attendre à ce que l'étude des divergences ultraviolettes d'une théorie euclidienne des champs soit très liée à la compréhension des phénomènes critiques. Pour $d < 4$, une méthode de perturbation en $\varepsilon = 4 - d$ autour du cas $d = 4$ permet d'étendre cette similitude. Dans la dernière section de ce chapitre, nous donnerons un argument heuristique indiquant que l'existence d'une limite continue donne des contraintes sur la structure du développement perturbatif autour du col. Ces contraintes permettent d'interpréter de façon cohérente le résultat (a priori sans signification à cause des divergences) que nous avons obtenu.

E. LE MODELE SIGMA NON LINEAIRE

Avant de passer à la théorie des champs continue, nous allons donner un dernier exemple de modèle sur le réseau, exactement soluble dans une limite bien choisie. Nous allons voir réapparaître des formules très analogues à celles du paragraphe précédent, mettre en évidence des exposants qui varient avec la dimension et retrouver le rôle particulier joué par la dimension $d = 4$.

1) Le modèle

On étudie une généralisation du modèle d'Ising. Les variables dynamiques sont des vecteurs (spins) à $n + 1$ composantes mais contraints à être sur la sphère S_n, donc à être de la longueur unité. Le modèle d'Ising correspond au cas $n = 0$. L'énergie d'une configuration est

$$E(\mathcal{C}) = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j - \sum_i \vec{H}_i \cdot \vec{S}_i$$

et la fonction de partition est

$$Z_n = \int \prod_i \mathrm{d}\vec{S}_i \ \delta\left(\vec{S}_i^2 - 1\right) \ \mathrm{e}^{\beta\left(\frac{1}{2}\sum_{i,j} J_{ij} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_j + \sum_i \vec{H}_i \cdot \vec{S}_i\right)} \ .$$

Lorsque $\vec{H}$ est nul, donc en l'absence de champ magnétique, $E(\mathcal{C})$ est invariante sous l'action du groupe $O(n + 1)$, groupe des rotations de $\mathbb{R}^{n+1}$ qui généralise $\mathbb{Z}_2 = O(1)$ rencontré dans l'étude du modèle d'Ising. Nous nous attendons à ce que, à la limite thermodynamique et pour une température assez basse, il apparaisse une aimantation spontanée qui est un vecteur dans $\mathbb{R}^{n+1}$. Sa direction sera par exemple fixée par la direction d'un champ magnétique infinitésimal. En dessous de la température critique la symétrie sera donc brisée et réduite à $O(n)$. Nous verrons tout cela explicitement dans la limite où le nombre de composantes est grand. En fait le modèle se résout exactement pour $n \longrightarrow \infty$.

2) Equivalence avec un modèle de spins gaussien

Comme nous ne savons calculer que les intégrales gaussiennes, nous allons nous ramener à ce cas. Le point de départ est la représentation intégrale de la fonction delta par

$$\delta(x) = \int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \mathrm{e}^{i\alpha x} \ .$$

On a donc

$$Z_n = \int \prod_j \mathrm{d}\vec{S}_j \prod_j \frac{\mathrm{d}\alpha_j}{2\pi} \mathrm{e}^{i\sum_j \alpha_j\left(\vec{S}_j^2 - 1\right)} \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}\sum_{j,k} \vec{S}_j \vec{S}_k + \beta \sum_j \vec{H}_j \cdot \vec{S}_j} \ .$$

Si maintenant nous intervertissons les ordres d'intégration entre $\vec{S}_j$ et λ_j l'intégrale sur les spins est gaussienne et peut donc se calculer explicitement. Pour cela il faut s'assurer de la convergence absolue des intégrales. Une façon de faire est de remplacer λ_j par $\lambda_j + i\mu$ où μ est un réel positif assez grand pour que la matrice $-2\left(i\lambda_j - \mu\right)\delta_{jk} - \beta \ J_{jk}$ ait toutes ses valeurs propres à partie réelle strictement positive. En effet pour tout μ

$$\int \frac{\mathrm{d}\alpha}{2\pi} \mathrm{e}^{(i\alpha - \mu)x} = \delta(x) \ .$$

Tant que le réseau est fini le spectre de J_{jk} est borné donc un μ satisfaisant les conditions requises existe toujours. Si en plus nous nous plaçons dans le cas homogène, qui est celui qui nous intéresse vraiment, nous pourrons choisir un μ indépendant de la taille du réseau. Nous écrivons donc

$$Z_n = \int \prod_j \frac{\mathrm{d}\alpha_j}{2\pi} \int \prod_j \mathrm{d}\vec{S}_j \ \mathrm{e}^{i\sum_j(\alpha_j+i\mu)\left(S_j^2-1\right)} \mathrm{e}^{\frac{\beta}{2}\sum_{j,k} J_{jk}\vec{S}_j\vec{S}_k+\beta\sum_j \vec{H}_j\vec{S}_j} \ .$$

Arrivés à ce point, plusieurs stratégies sont possibles. Il est possible d'intégrer sur toutes les composantes du spin explicitement. Si on veut ensuite calculer des fonctions de corrélation spin spin, il faut alors conserver un champ magnétique. En dérivant Z_n par rapport à ce champ on obtient alors de telles corrélations. Comme c'est l'apparition d'une aimantation spontanée qui caractérise la transition de phase, il est physiquement plus simple de conserver explicitement une composante des spins et d'intégrer explicitement sur les n autres composantes. On choisit alors la direction de ce spin pour briser la symétrie en dessous de la température critique. On dispose ainsi directement du paramètre d'ordre. On écrit donc $\vec{S} = (\sigma, \vec{\pi})$ et on intègre sur $\vec{\pi}$.

3) La solution à champ magnétique nul

On part de

$$\begin{aligned} Z_n &= \int \prod_j \frac{\mathrm{d}\alpha_j \mathrm{d}\sigma_j}{2\pi} \ \mathrm{e}^{i\sum_j(\alpha_j+i\mu)\left(\sigma_j^2-1\right)+\frac{\beta}{2}\sum_{j,k}\sigma_j\sigma_k} \times \\ &\times \int \prod_j \mathrm{d}\vec{\pi}_j \ \mathrm{e}^{i\sum_j(\alpha_j+i\mu)\vec{\pi}_j^2+\frac{\beta}{2}\sum_{j,k}J_{jk}\vec{\pi}_j\vec{\pi}_k} \ . \end{aligned}$$

Dans la dernière intégrale les différentes composantes de $\vec{\pi}_j$ ne sont pas couplées entre elles, et l'intégrale est donc la puissance $n^{\text{ième}}$ de l'intégrale sur une composante, qui est gaussienne. Nous obtenons donc

$$Z_n = \int \prod_j \frac{\mathrm{d}\alpha_j \mathrm{d}\sigma_j}{2\pi} \mathrm{e}^{i\sum_j(\alpha_j+i\mu)\left(\sigma_j^2-1\right)+\frac{\beta}{2}\sum_{j,k}J_{jk}\sigma_j\sigma_k} (2\pi)^{N_n/2} \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}\mathrm{Tr}\ \log\ B}$$

où $B_{jk} = -2i\,(\alpha_j + i\mu)\,\delta_{jk} - \beta\ J_{jk}$.

Nous sommes intéressés par le comportement de Z_n à n grand et l'apparition d'un facteur n devant Tr log B fait penser à utiliser la méthode du col. Mais le facteur n n'est pas présent partout. Pour faire apparaître un facteur n global il faut d'une part changer l'échelle des couplages ou de la température et d'autre part celle de $\alpha_j + i\mu$. Ceci signifie que pour n grand et à couplages fixés, les phénomènes thermodynamiques (par exemple les transitions de phase) se passent à des températures d'ordre n^{-1}. On peut effectivement comprendre intuitivement que les températures caractéristiques doivent diminuer avec n car augmenter n favorise l'entropie. Nous incluons donc un facteur n dans la définition des couplages et nous changeons de variable $\alpha_j + i\mu$ en incluant un facteur n. Alors

$$Z_n = \int \prod_j \mathrm{d}\alpha_j \ \mathrm{d}\sigma_j \ \mathrm{e}^{-n\left(\sum_j(\mu-i\alpha_j)\left(\sigma_j^2-1\right)-\frac{\beta}{2}\sum_{j,k}\sigma_j\sigma_k+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \log\ B\right)} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{N(n-2)/2} .$$

D'après la méthode du col, pour n grand on a

$$Z_n \sim \mathrm{e}^{-n\left(\sum_j\left(\mu^*-i\alpha_j^*\right)\left(\sigma_j^{*2}-1\right)-\frac{\beta}{2}\sum_{j,k}\sigma_j^*\sigma_k^*+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\ \log\ B^*\right)} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{N(n-2)/2}$$

où $\mu^* - i\alpha_j^*$ et σ_j^* vérifient les équations d'extremum de l'exposant.

A titre de vérification regardons le résultat lorsque N, le nombre de sites, est égal à 1 et que la température est infinie ($\beta = 0$). Dans ce cas particulier Z_n n'est autre que la surface de la sphère unité de dimension n, que nous écrivons

$$Z_n = \int \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{d}\sigma\ \mathrm{e}^{-n(\mu-i\alpha)\left(\sigma^2-1\right)}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}\log\ 2(\mu-i\alpha)} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{(n-2)/2} .$$

Les équations de col sont

$$(\mu - i\alpha)\sigma = 0 \qquad\qquad \sigma^2 - 1 + \frac{1}{2(\mu - i\alpha)} = 0$$

d'où $\sigma = 0$, $\mu - i\alpha = \frac{1}{2}$ et

$$Z_n \sim \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{(n-2)/2} .$$

Nous pouvons même aller à un ordre de plus pour obtenir vraiment un équivalent de Z_n. Conformément aux principes de la méthode de Laplace il faut développer autour du col en ne gardant que les termes quadratiques et intégrer le long de la ligne où la décroissance est la plus rapide, car l'analyticité nous permet de déformer les contours. Dans ce cas il faut intégrer pour σ le long de l'axe réel et pour $\mu - i\alpha$ le long de l'axe $\mu = \frac{1}{2}$, α réel. Alors

$$Z_n \sim \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{(n-2)/2} \int \mathrm{d}\sigma\ \mathrm{d}\alpha\ \mathrm{e}^{-\frac{n}{2}\sigma^2 - \frac{n}{2}\alpha^2} .$$

Donc l'équivalent pour Z_n est

$$Z_n \sim \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n/2} .$$

En gardant des termes plus élevés en σ et $\alpha + i\mu$ on obtient un développement systématique de Z_n sous la forme

$$Z_n \sim \mathrm{e}^{\frac{n}{2}} \left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n/2} \left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n^2} + \ldots\right)$$

mais nous n'aurons besoin que de l'équivalent, dont nous allons voir qu'il redonne le premier terme de la formule de Stirling.

En effet partant de

$$\int \mathrm{d}\vec{S}\ \mathrm{e}^{-\pi\vec{S}^2} = 1$$

pour $\vec{S}$ un vecteur à $n+1$ composantes et passant en coordonnées sphériques, on obtient

$$Z_n \int_0^\infty \mathrm{d}r\ r^n\ \mathrm{e}^{-\pi r^2} = 1 .$$

Posant $\pi r^2 = u$ on obtient une fonction Γ et finalement

$$Z_n = \frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)}$$

qui donne bien les valeurs 2, 2π, 4π pour $n = 0, 1, 2$. Nous avons donc obtenu $\frac{2\pi^{(n+1)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} \sim \mathrm{e}^{n/2}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{n/2}$ soit

$$\Gamma((n+1)/2) \sim 2\pi^{1/2}\left(\frac{n}{2e}\right)^{n/2}$$

qui se déduit immédiatement de la formule de Stirling

$$\Gamma(z) \sim \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{1/2}\left(\frac{z}{\mathrm{e}}\right)^{z} .$$

Remarquons enfin que ne garder que la valeur au col, sans fluctuations, ne change pas le comportement dominant et ne néglige qu'une correction algébrique.

Nous pouvons maintenant revenir au cas général. Nous nous plaçons dans le cas d'un système homogène sur un réseau de taille $N = L^d$. Nous conservons les notations des paragraphes précédents pour la transformation de Fourier des couplages. Grâce à l'invariance par translation, nous pouvons chercher une solution des équations du col constante. Notons $\mu^* - i\alpha^*$ et σ^* la valeur au col de $\mu - i\alpha_j$ et σ_j. Alors

$$Z_n \sim \mathrm{e}^{-nN\left((\mu^*-i\alpha^*)\left(\sigma^{*2}-1\right)-\frac{\beta}{2}\lambda_0\sigma^{*2}+\frac{1}{2N}\sum_\ell \log(-2i(\alpha^*+i\mu^*)-\beta\lambda_\ell)\right)}\left(\frac{2\pi}{n}\right)^{N(n-2)/2}$$

où, rappelons-le, $\lambda_\ell = \sum_j J_{0,j}\xi^{-j\ell}$.

Les équations du col sont

$$\begin{aligned}
&\sigma^*\left(2\left(\mu^* - i\alpha^*\right) - \beta\ \lambda_0\right) = 0\\
&\sigma^{*2} - 1 + \frac{1}{N}\sum_\ell \left(2\left(\mu^* - i\alpha^*\right) - \beta\ \lambda_\ell\right)^{-1} = 0\ .
\end{aligned}$$

Il y a deux possibilités pour la première équation : soit $2\left(\mu^* - i\alpha^*\right) - \beta\ \lambda_0 = 0$ soit $\sigma^* = 0$. La première solution est à rejeter car elle fait apparaître un terme infini dans la seconde équation. Donc la solution des équations du col est donnée implicitement par

$$\begin{aligned}
&\sigma^* = 0\\
&\frac{1}{N}\sum_\ell \left(2\left(\mu^* - i\alpha^*\right) - \beta\ \lambda_\ell\right)^{-1} = 1\ .
\end{aligned}$$

On en déduit $\alpha^* = 0$ et μ^* est donc déterminé par

$$\frac{1}{N}\sum_\ell \frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda_\ell} = 1\ .$$

Il est facile de se convaincre que ceci définit une fonction régulière $\mu^*(\beta)$ pour β réel positif. Tout d'abord rappelons que λ_ℓ est une fonction réelle et paire de ℓ. Comme les couplages sont ferromagnétiques (c'est-à-dire positifs), on vérifie que $|\lambda_\ell| \leq \lambda_0$ et même (comme J_{ij} contient de vrais couplages) $|\lambda_\ell| < \lambda_0$ pour $\ell \neq 0$ car $|\lambda_\ell| = \left|\sum_j J_{0j}\xi^{j\ell}\right| \leq \sum_j |J_{0j}| = \sum_j J_{0j}$ avec inégalité stricte sauf si $J_{0j} = 0$, $j \neq 0$, cas que nous avons exclu. Comme μ^* est déterminé par

$$\frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda_0} + \sum_{\ell\neq 0} \frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda_\ell} = N$$

pour tout β on a $\mu^*(\beta) > \frac{\beta\lambda_0}{2}$ et $\mu^*(0) = \frac{1}{2}$, $\mu^*(\beta) \sim \frac{\beta\lambda_0}{2}$ pour β grand. De plus $\beta^{-1}\mu_*$ est une fonction décroissante de β. En effet dérivant l'équation du col pour μ^* par rapport à β nous obtenons

$$-\sum_\ell \frac{2\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} - \lambda_\ell}{\left(2\mu^* - \beta\lambda_\ell\right)^2} = 0$$

d'où

$$-\sum_\ell \frac{2\beta\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} - 2\mu^* + 2\mu^* - \beta\lambda_\ell}{\left(2\mu^* - \beta\lambda_\ell\right)^2} = 0$$

soit en utilisant l'équation du col

$$2\left(\mu^* - \beta\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta}\right)\sum_\ell \frac{1}{\left(2\mu^* - \beta\lambda_\ell\right)^2} = N$$

d'où $\mu^* - \beta\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} > 0$ soit $\beta^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\beta}\left(\frac{\mu^*}{\beta}\right) < 0$.

Il est raisonnable de définir une énergie libre par site et par composante de spin dans ce modèle. Alors

$$\beta\ f_N(\beta) = \left(\mu^* - i\alpha^*\right)\left(\sigma^{*2} - 1\right) - \frac{\beta}{2}\lambda_0\sigma^{*2} + \frac{1}{2N}\sum_\ell \log\left(2\left(\mu^* - i\alpha^*\right) - \beta\lambda_\ell\right)$$

est relié à Z_n à la limite n grand par

$$\log\ Z_n \sim nN\left(\beta\ f_N(\beta) + \log\frac{n}{2\pi}\right)\ .$$

Le second terme est indépendant de β, c'est une pure normalisation. Tant que N est fini nous venons de voir que f_N est une fonction régulière de β. La formule explicite est

$$\beta\ f_N(\beta) = -\mu^* + \frac{1}{2N}\sum_\ell \log\left(2\mu^* - \beta\lambda_\ell\right)$$

avec l'équation du col déterminant implicitement $\mu^*(\beta)$ qui n'est autre que la condition de minimum de l'énergie libre en fonction de μ. Nous venons de prouver dans ce cas particulier qu'il n'y a pas de transition de phase pour un système fini.

Conformément aux remarques que nous avons faites dans l'introduction, nous nous attendons cependant à ce que pour un système fini mais grand il reste des traces d'une transition de phase pour le système infini. Pour N assez grand l'introduction d'un champ magnétique infime crée une aimantation indiscernable "expérimentalement" de la courbe prédite pour le système infini à champ magnétique externe infinitésimal. Si nous mettons le système dans un champ magnétique extérieur uniforme h couplé à la composante du spin σ il est facile de modifier les calculs précédents. A nouveau au col $\alpha^* = 0$ et on a

$$\beta\ f_N(\beta, h) = \mu^*\left(\sigma^{*2} - 1\right) - \frac{\beta}{2}\lambda_0\sigma^{*2} - \beta h\sigma^* + \frac{1}{2N}\sum_\ell \log\left(2\mu^* - \beta\lambda_\ell\right)$$

avec

$$\begin{aligned} &\sigma^*\left(2\mu^* - \beta\lambda_0\right) = \beta h \\ &\sigma^{*2} - 1 + \frac{1}{N}\sum_\ell \left(2\mu^* - \beta\lambda_\ell\right)^{-1} = 0\ . \end{aligned}$$

Il est intuitivement clair que σ^* n'est rien d'autre que l'aimantation du système. C'est d'ailleurs facile à vérifier. Par définition $M = -\frac{\partial f_N}{\partial h}$. Lorsque h change, les solutions σ^* et μ^* aussi mais comme f_N est stationnaire par rapport à ces variables (c'est le contenu des équations du col une fois de plus) on a $\frac{\partial(\beta\ f_N)}{\partial h} = -\beta\sigma^*$ d'où $M = \sigma^*$. La nullité de σ^* pour $h = 0$ à N fini nous donne donc une autre preuve de l'absence de transition, car il n'y a pas d'aimantation spontanée quelle que soit la température. Il est possible d'analyser les équations du col en présence d'un champ magnétique comme nous l'avons fait pour $h = 0$. En particulier on voit aisément que μ^* et σ^* sont des fonctions régulières de β et h. Pour tout (β, h) on a encore $2\mu^* - \beta\ \lambda_0 > 0$ d'où $\sigma^{*2} < 1$ car la deuxième équation donne $1 - \sigma^{*2}$ comme somme de termes positifs. On en déduit qu'en fait $2\mu^* - \beta\lambda_0 \geq \beta h$ (on suppose $h \geq 0$). Ceci a une conséquence importante. Pour $h \neq 0$ les sommations sur ℓ dans la définition de l'énergie libre ou dans les équations du col sont des sommes de Riemann de fonctions dépendant d'un paramètre (μ^*) qui ne varie que dans un domaine où les fonctions sont régulières. On peut donc passer à la limite thermodynamique ($N \longrightarrow \infty$). Dans cette limite on a

$$\beta f(\beta, h) = \mu^* \left(\sigma^{*2} - 1\right) - \frac{\beta}{2}\lambda(0)\sigma^{*2} - \beta h\sigma^* + \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \log\left(2\mu^* - \beta\lambda(k)\right)\ ,$$

avec

$$\begin{aligned} &\sigma^* \left(2\mu^* - \beta\lambda(0)\right) = \beta h \\ &\sigma^{*2} - 1 + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} = 0\ . \end{aligned}$$

Un phénomène nouveau peut maintenant apparaître : dans la deuxième équation du col, l'intégrand est toujours positif et maximum à l'origine. Si nous supposons les couplages à courte portée, nous avons vu que $\lambda(k)$ admet un développement pour k petit du type $\lambda(k) = J - k^2 J' + \mathcal{O}\left(\left(k^2\right)^2\right)$. Il y a alors deux possibilités. Si $d \leq 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\lambda(0) - \lambda(k)}$$

diverge et on conçoit que cette intégrale est un bon substitut à la somme finie

$$\sum_{\ell} \frac{1}{\lambda_0 - \lambda_\ell}$$

qui diverge aussi à cause du terme $\ell = 0$. Plus précisément si $d \leq 2$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\gamma + \lambda(0) - \lambda(k)}$$

est une fonction décroissante de γ qui décrit l'axe réel positif quand γ décrit cet axe, et la fonction

$$\sum_{\ell} \frac{1}{\gamma + \lambda_0 - \lambda_\ell}$$

a exactement les mêmes propriétés. En conséquence si $d \leq 2$ on peut répéter mot à mot la discussion du système de taille finie et voir que le modèle n'a pas de transition de phase (ou plus précisément pas de transition de phase avec brisure de symétrie et apparition d'une aimantation spontanée. Dans le modèle avec $n = 1$, encore appelé modèle XY, il y a une transition dite de Kosterlitz Thouless, sans brisure spontanée de symétrie. Une étude détaillée de ce modèle est possible et instructive (nous éspèrons avoir donné envie au lecteur de consulter la littérature abondante sur le sujet). Il est intéressant de rapprocher ceci du résultat que nous avons trouvé dans l'étude du champ moyen et de ses corrections. Dans ce cadre pour $d \leq 2$ la correction du premier ordre à la température critique était infinie. Nous verrons d'autres similitudes par la suite. Dans le cas $d > 2$ la situation est toute différente. L'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\lambda(0) - \lambda(k)}$$

converge (on note β_c sa valeur) et majore

$$\beta \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} \ .$$

Ceci implique $\sigma^{*2} \geq 1 - \frac{\beta_c}{\beta}$.

Cette inégalité montre que pour $\beta > \beta_c$, il y a une aimantation finie même pour une valeur arbitrairement petite (voire nulle) de h. Donc il y a une transition de phase. Nous allons calculer les exposants critiques et extraire certaines singularités des fonctions thermodynamiques.

Pour commencer nous posons $h = 0$. On voit que pour $\beta \leq \beta_c$, il faut que $\sigma^* = 0$ et μ^* est déterminé par

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} = 1 \ .$$

Par contre pour $\beta \geq \beta_c$ il faut que $2\mu^* - \beta\lambda(0) = 0$ et $\sigma^{*2} = 1 - \frac{\beta_c}{\beta}$. Donc pour ce modèle l'exposant β (défini par $M^2 \sim (T_c - T)^{2\beta}$) coïncide avec celui du champ moyen pour Ising, et vaut $1/2$. L'énergie libre est donnée par

$$\beta f = -\mu^* + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \log\left(2\mu^* - \beta\lambda(k)\right)$$

avec

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} = 1$$

pour $\beta \leq \beta_c$ et

$$\beta f = -\frac{\beta}{2}\lambda(0) + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \log(\lambda(0)\lambda(k))$$

pour $\beta \geq \beta_c$.

Sur ces expressions on voit tout de suite que f n'est pas analytique à $h = 0$, $\beta = \beta_c$. Nous allons rendre cette remarque un peu plus précise. Il est clair que la formule pour f lorsque $\beta \geq \beta_c$ se prolonge trivialement pour $\beta \leq \beta_c$.

Notons f_s la différence entre ce prolongement et la véritable valeur de f pour $\beta \leq \beta_c$. Ainsi pour $\beta \leq \beta_c$

$$\beta f_s = \mu^* - \frac{\beta}{2}\lambda(0) + \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \log \frac{\beta(\lambda(0) - \lambda(k))}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} \ .$$

En dérivant par rapport à β nous obtenons la construction analogue pour l'énergie moyenne par site

$$u_s = \frac{\mathrm{d}\beta f_s}{\mathrm{d}\beta} = -\frac{\lambda(0)}{2} + \frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{2\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} - \lambda(k)}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} + \frac{1}{2\beta} \ .$$

Ecrivant $2\beta\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} - \beta\lambda(k) = 2\beta\frac{\mathrm{d}\mu^*}{\mathrm{d}\beta} - 2\mu^* + 2\mu^* - \beta\lambda(k)$ on obtient

$$u_s = -\frac{\lambda(0)}{2} + \frac{\mu^*}{\beta} \ .$$

Nous savons que ceci s'annule lorsque la température s'approche de la température critique. Pour calculer l'exposant, nous procédons de la façon suivante. Nous posons $\beta\varepsilon = 2\mu^* - \beta\lambda(0)$ et partons de l'équation du col

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\beta(\varepsilon + \lambda(0) - \lambda(k))} = 1 = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\beta_c(\lambda(0) - \lambda(k))} \ .$$

En faisant la différence on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{(\beta_c - \beta)\,(\lambda(0) - \lambda(k)) - \beta\varepsilon}{\beta\beta_c(\varepsilon + \lambda(0) - \lambda(k))(\lambda(0) - \lambda(k))} = 0$$

soit encore

$$\frac{\beta_c - \beta}{\beta\beta_c} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\varepsilon + \lambda(0) - \lambda(k))} = \frac{\varepsilon}{\beta_c} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\varepsilon + \lambda(0) - \lambda(k))(\lambda(0) - \lambda(k))} \ .$$

Il faut maintenant discuter en fonction de la dimension. Tout d'abord cette formule montre que ε s'annule à la température critique. On en déduit que le comportement dominant du premier membre est $\frac{\beta_c - \beta}{\beta}$ car l'intégrale converge pour $\varepsilon = 0$. Pour le second membre c'est un peu plus subtil. Si $d > 4$ l'intégrale converge pour $\varepsilon = 0$ ce qui implique que $\beta_c - \beta$ est proportionnel à ε. Si $2 < d < 4$ il n'est pas possible de faire $\varepsilon = 0$ dans l'intégrale car elle diverge (en effet à k petit le dénominateur est équivalent à $\left(\varepsilon + J'k^2\right) J'k^2$ et $\left(k^2\right)^{-2}$ n'est pas intégrable). Le truc est de poser $k = \sqrt{\varepsilon}\ q$. On constate alors que l'intégrale se comporte comme

$$\frac{\varepsilon^{d/2}}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(J'q^2 + 1)\,J'q^2}$$

ce qui implique que $\beta_c - \beta$ est proportionnel à $\varepsilon^{(d-2)/2}$. Finalement dans le cas $d = 4$ il y a une singularité logarithmique et le "truc" précédent ne fait que transformer cette singularité infrarouge en singularité ultraviolette. Toute cette discussion rappelle à nouveau l'étude des corrections au champ moyen.

Nous avons donc obtenu que u_s se comporte comme $\beta_c - \beta$ pour $d > 4$ et $(\beta_c - \beta)^{2/(d-2)}$ pour $2 < d < 4$. On peut montrer que l'exposant de $\beta_c - \beta$ est égal à $1 - \alpha$ donc $\alpha = 0$ pour $d > 4$ et $\alpha = -\frac{4-d}{d-2}$ pour $2 < d < 4$ (rappelons que α est l'exposant de la chaleur spécifique).

Calculons l'exposant δ en déterminant la dépendance de l'aimantation en fonction du champ magnétique à $\beta = \beta_c$. A nouveau posons $\beta_c\varepsilon = 2\mu^* - \beta_c\lambda(0)$. Les équations sont $\sigma^*\varepsilon = h$ et

$$\sigma^{*2} - 1 + \frac{1}{\beta_c} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{\varepsilon + \lambda(0) - \lambda(k)} = 0 \ .$$

Comme dans le calcul précédent, on utilise la définition de β_c pour réécrire la seconde équation du col sous la forme

$$\beta_c \sigma^{*2} = \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(\varepsilon + \lambda(0) - \lambda(k))(\lambda(0) - \lambda(k))} \ .$$

On en déduit, en suivant le raisonnement précédent, que σ^{*2} varie comme ε pour $d > 4$ et comme $\varepsilon^{d/2-1}$ pour $2 < d < 4$. En reportant dans la première équation du col on obtient que l'aimantation à $\beta = \beta_c$ se comporte comme $h^{1/\delta}$ avec $\delta = 3$ pour $d > 4$ et $\delta = \frac{d+2}{d-2}$ pour $2 < d < 4$.

Pour terminer cette étude, nous allons nous convaincre que la transition de phase est bien associée à une longueur de corrélation qui diverge. Plaçons-nous au-delà de la température critique ($\beta \leq \beta_c$). Il n'y a pas brisure de symétrie donc les composantes σ et $\vec{\pi}$ de $\vec{S}$ ont les mêmes corrélations. Si nous couplons $\vec{\pi}$ à un champ magnétique, l'intégrale est toujours gaussienne, donc l'énergie libre est quadratique en champ magnétique et un calcul élémentaire montre que la fonction de corrélation $\langle \sigma_i \sigma_j \rangle$ est proportionnelle à $\left(B^{-1}\right)_{ij}$. En transformée de Fourier, la fonction de corrélation de deux σ est donc diagonale et proportionnelle à $\frac{1}{2\mu^* - \beta\lambda(k)}$.

Quand β tend vers β_c on voit que la longueur de corrélation ξ se comporte comme $(2\mu^* - \beta\lambda(0))^{-1/2}$. En effet

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{e}^{ikr}}{2\mu^* - \beta\lambda(k)} \cong \langle \sigma(0)\sigma(r) \rangle$$

décroît exponentiellement avec r (qui est un noeud du réseau) quand celui-ci tend vers l'infini. Nous l'avons déjà établi dans des circonstances analogues, pour la marche aléatoire et pour le modèle d'Ising à deux dimensions.

Nous remarquons une dernière fois que $\left(\frac{2\mu^* \beta\lambda(0)}{\lambda(0)}\right)$ a les dimensions de k^2 donc se comporte comme l'inverse du carré d'une longueur, et s'annule au point critique. On pourrait recommencer les analyses des deux premiers chapitres pour définir la limite continue. Nous avons déjà calculé la façon dont $2\mu^* - \beta(0)\lambda$ s'annule avec $\beta_c - \beta$. Nous avons obtenu un comportement en $(\beta_c - \beta)$ pour $d > 4$ et en $(\beta_c - \beta)^{\frac{2}{d-2}}$ pour $2 < d < 4$. Donc pour la longueur de corrélation ξ on obtient $\xi \sim (\beta_c - \beta)^{-\nu}$ avec $\nu = 1/2$ pour $d > 4$ et $\nu = 1/(d-2)$ pour $2 < d < 4$.

Nous pouvons constater que pour $d > 4$ nous retrouvons les exposants du champ moyen, mais que ceux-ci sont modifiés pour $2 < d < 4$.

Il y aurait beaucoup d'autres choses à dire sur ce modèle, sur les corrections en $1/n$, etc. Mais notre étude grossière est déjà très instructive. Il est frappant de voir comme des problèmes qui semblent différents au premier abord font apparaître des objets très "universels" dès qu'on essaye de les résoudre même de façon approximative. Le lecteur aura pris conscience que tous les problèmes que nous avons traités font intervenir un équivalent discret du propagateur euclidien $\frac{1}{k^2+m^2}$ qui se ramène à celui-ci à la limite continue.

F. PASSAGE A LA LIMITE CONTINUE

1) Considérations naïves

Considérons un système physique décrit par un scalaire $\varphi(x)$ où x est un noeud d'un réseau cubique de maille a de dimension $d > 2$ noté R. On suppose que ce système est invariant dans les symétries du réseau, et que les fluctuations de $\varphi(x)$ ont une probabilité proportionnelle à $\mathrm{e}^{-S(\varphi)}$ où $S(\varphi(x))$ provient d'interactions bilinéaires à courte portée, d'un potentiel arbitraire, et d'interactions avec un champ extérieur. On écrit donc

$$S(\varphi) = \sum_{x,x' \in R} \frac{1}{2}\varphi(x)K(x-x')\varphi(x') + \sum_{x\in R} V(\varphi(x)) - \sum_{x\in R} \varphi(x)j(x) \,. \tag{14}$$

La quantité fondamentale est la normalisation de la probabilité

$$Z(j) = \int \prod_{x\in R} \mathrm{d}\varphi(x)\mathrm{e}^{-S(\varphi)} \,.$$

On remarque tout de suite que ce genre de système est très analogue aux systèmes de spins que nous avons étudiés jusqu'à maintenant. Nous avons d'ailleurs explicitement montré que le modèle d'Ising admet une telle représentation. On peut supposer que $\sum_x K(x) = 0$ et écrire $V(\varphi) = \sum_0^\infty \frac{\lambda_n}{n!}\varphi^n$. Si V est paire, ce que nous supposerons dans la suite, seul le champ extérieur j brise la symétrie $\varphi \longleftrightarrow -\varphi$. Alors on voit que λ_2 est une mesure linéaire de l'écart à la température critique, au moins dans l'approximation du champ moyen. Comme nous l'avons déjà remarqué, nous nous attendons à ce que les détails de $V(\varphi)$ ne jouent pas de rôle dans le comportement critique. Dans les systèmes considérés jusqu'à présent, la température était le seul paramètre macroscopique ajustable (ou paramètre de contrôle), mais en général il peut y avoir plusieurs tels paramètres. Si nous imaginons que $S(\varphi)$ provient d'une énergie microscopique (par exemple par un procédé tel que celui utilisé en II.A.2) les coefficients de $V(\varphi)$ dépendent des constantes de couplage microscopiques (qui sont fixées par la nature) et des p paramètres de contrôle, que nous supposons en nombre fini. Génériquement on peut supposer qu'en jouant sur ces paramètres on peut donner des valeurs assignées à l'avance à $\lambda_2, ..., \lambda_{2p}$ et qu'alors les valeurs des autres coefficients sont déterminées. Le minimum de $S(\varphi)$ à champ extérieur nul n'est pas forcément en 0, et en jouant sur les paramètres de contrôle, il est possible de discerner à l'ordre du champ moyen divers comportements critiques. Quand λ_2 tend vers 0 alors que λ_4 reste fini, on retrouve les résultats précédents.

Par rapport aux distances macroscopiques, la maille du réseau est très petite. Donc si $\varphi(x)$ ne varie de façon notable que sur des distances très grandes devant la maille du réseau, on s'attend à pouvoir écrire S comme une intégrale. Commençons par le terme contenant $K(x-x')$. Soit $\varphi(x)$ une fonction régulière (qu'on peut restreindre aux noeuds du réseau) qui n'a pas de composantes de Fourier pour des longueurs d'onde plus petites que la maille du réseau a. On écrit

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(k)\mathrm{e}^{ikx}$$

où $\tilde{\varphi}(k)$ s'annule lorsque les composantes de k sont plus grandes (en valeur absolue) que $\frac{\pi}{a}$.

$$\begin{aligned}\sum_{x,x'\in R} \varphi(x)K(x-x')\varphi(x') &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^d k'}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(k') \\ &\quad\times \sum_{x,x'\in R} K(x-x')\ \mathrm{e}^{i\left(kx+k'x'\right)} \,.\end{aligned}$$

Si $\tilde{K}(k) = \sum_{x\in R} K(x)\mathrm{e}^{ikx}$, la somme double du second membre vaut

$$\tilde{K}(k) \sum_{v\in R^*} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^d \delta\left(k + k' - v\right)$$

où R^* est le réseau dual (ici un réseau cubique de maille $\frac{2\pi}{a}$). D'après les hypothèses sur $\tilde{\varphi}(k)$ on est assuré que pour $v \in R^*$, $\tilde{\varphi}(k)\tilde{\varphi}(v-k) = 0$ sauf si $v = 0$. Finalement

$$\sum_{x,x'\in R} \varphi(x) K\left(x - x'\right) \varphi\left(x'\right) = a^{-d} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \tilde{\varphi}(k)\tilde{K}(k)\tilde{\varphi}(-k) \; .$$

Si maintenant on fait en plus l'hypothèse que $\varphi(x)$ ne varie de façon notable que sur des distances macroscopiques, donc que $\tilde{\varphi}(k)$ s'annule dès que les composantes de k sont d'ordre 1 (et non plus π/a comme avant) il devient légitime de développer $\tilde{K}$ au voisinage de $k = 0 dansl'intgrale.$ On a déjà supposé $\sum_x K(x) = 0$ donc $\tilde{K}(0) = 0$. Du fait des symétries du réseau cubique on obtient $\tilde{K}(k) = Z_\phi a^2 k^2 + O\left(k^4\right)$. Le caractère microscopique de K implique que les coefficients de $\tilde{K}$ en ka sont d'ordre unité dans un cas générique. Le coefficient Z_ϕ vaut

$$-\frac{1}{2d} \sum_{x\in R} K(x) x^2$$

et nous le supposons (cas générique) non nul. Les termes suivants du développement sont alors négligeables et

$$\sum_{x,x'\in R} \varphi(x) K\left(x - x'\right) \varphi\left(x'\right) = a^{2-d} \int \mathrm{d}^d x \; Z_\phi (\nabla\varphi)^2 \; .$$

Le bilan de ceci est que d'une part pour les fluctuations d'échelle macroscopique seul le terme dominant de $\tilde{K}(k)$ contribue, et d'autre part que l'échelle naturelle des fluctuations à longue distance est donnée par le champ $a^{1-\frac{d}{2}}\varphi(x) \equiv \phi(x)$. On peut reporter ceci dans le terme de potentiel qui vaut

$$\sum_0^\infty \frac{\lambda_{2n}}{(2n)!} a^{n(d-2)} \sum_{x\in R} \phi^{2n}(x)$$

soit encore

$$\sum_0^\infty \frac{\lambda_{2n}}{(2n)!} a^{n(d-2)-d} a^d \sum_{x\in R} \phi^{2n}(x) \; .$$

Bien sûr

$$a^d \sum_{x\in R} \phi^{2n}(x)$$

est le candidat naturel pour représenter

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}^d x \; \phi^{2n}(x)$$

car ϕ ne varie pas sur des distances microscopiques.

Pour que ceci soit cohérent, il faut que

$$\frac{\lambda_{2n}}{(2n)!} a^{n(d-2)-d} \equiv Z_\phi^n Z_{2n} \frac{g_{2n}}{(2n)!}$$

soit d'ordre unité. Le cas $n = 0$ n'est pas intéressant. Rappelons que les λ_{2n} dépendent des couplages microscopiques et des p paramètres de contrôle, et qu'à moins d'ajuster ceux-ci, $\frac{\lambda_2}{2}a^{-2}$ est énorme. De même, $\frac{\lambda_{2n}}{(2n)!}a^{n(d-2)-d}$ est énorme tant que $n(d-2) < d$. Donc une théorie macroscopique ne peut émerger que si l'on peut ajuster suffisamment de paramètres pour fixer

$$\frac{\lambda_{2n}}{(2n)!}a^{n(d-2)-d}$$

à être d'ordre unité pour $n(d-2) \leq d$. Une fois que ces valeurs sont choisies, les λ_{2n} pour $n(d-2) > d$ sont génériquement d'ordre unité, donc

$$\frac{\lambda_{2n}}{(2n)!}a^{n(d-2)-d}$$

est négligeable.

On arrive donc à une théorie décrite par

$$\int \mathrm{d}^d x \left(\frac{Z_\phi}{2}(\nabla\phi)^2 + \sum_{1 \leq n \leq \frac{d}{d-2}} Z_\phi^n Z_{2n} \frac{g_{2n}}{(2n)!}\phi^{2n} \right) \ .$$

Pour l'instant Z_ϕ et les Z_n n'ont pas un sens intrinsèque car on pourrait les réabsorber complètement en redéfinissant ϕ et les g_{2n}. Cependant nous verrons plus tard qu'ils jouent un rôle non trivial pour l'analyse des fluctuations.

Par exemple pour $d = 3$ avec 2 paramètres ajustables, il ne reste à la limite continue que les termes ϕ^2, ϕ^4 et ϕ^6. Pour $d = 4$ avec un paramètre ajustable, il ne reste à la limite continue que ϕ^2 et ϕ^4. Il est important de bien voir le lien très étroit de cette discussion avec la discussion des fluctuations autour du champ moyen. Nous avons déjà remarqué que le champ moyen pour le modèle d'Ising (qui contient un paramètre de contrôle, la température) était décrit par une théorie de type (14) en identifiant M et φ. Les termes au-delà de M^4 ne comptaient pas, et le point de transition était déterminé par l'annulation du coefficient de M^2. Nous avons vu qu'au delà de $d = 4$ les fluctuations ne comptaient pas. Nous venons de voir qu'au-delà de $d = 4$ une théorie continue avec ϕ^4 n'existe pas, et que les fluctuations de grande longueur d'onde sont purement gaussiennes, ce qui explique l'exactitude du champ moyen. Pour $d \leq 4$, le passage à la théorie continue amenait à prendre le coefficient de φ^2 très petit, donc à se mettre au voisinage immédiat du point de transition. Tout ceci est qualitativement correct, mais sera néanmoins modifié par la prise en compte des fluctuations. Nous pouvons nous attendre à ce que (au moins à $d = 4$) les divergences infrarouges de la théorie critique correspondent aux divergences ultraviolettes de la théorie continue.

2) Le groupe de renormalisation

Pour clore ce chapitre nous allons essayer de donner un analogue de la discussion précédente qui tienne compte des fluctuations. Notre discussion sera incomplète mais permettra de comprendre que l'existence d'une limite continue contraint de façon à la fois intéressante et utilisable les fonctions de corrélation au voisinage du point critique.

Dans notre argument nous allons utiliser deux ingrédients : la structure que nous avons observée quand nous avons fait des passages à la limite continue de manière exacte et les renseignements qualitatifs du paragraphe précédent.

Etudions le comportement des corrélations $\langle\varphi(x_1)\ldots\varphi(x_n)\rangle$ d'un modèle défini pour une action de type (14). Pour simplifier commençons par supposer, comme dans le cas du modèle d'Ising, que la température est le seul paramètre et supposons qu'à $\beta = \beta_c$ il y a un point critique avec une limite continue. Notons ξ la longueur de corrélation à la température β. Cette longueur diverge à β_c (rappelons que ξ, qui est sans dimension en unités de la maille du réseau, est ce qui caractérise la décroissance exponentielle des fonctions de corrélation, par exemple de la fonction à deux points $\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle$). Suivant notre stratégie habituelle, nous passons à une échelle macroscopique dans laquelle la maille du réseau est a et nous posons $m = (\xi a)^{-1}$. La limite continue est obtenue en ajustant β à β_c et en faisant tendre la maille a vers 0 en laissant m, inverse de la longueur de corrélation macroscopique, fixé. Dans cette limite nous nous attendons à ce que

$$\left\langle\varphi\left(\frac{x_1}{a}\right)\ldots\varphi\left(\frac{x_n}{a}\right)\right\rangle \propto G_n(x_1,\ldots x_n,m,\xi)$$

(avec un facteur de proportionnalité indépendant de $x_1,\ldots,x_n$) où G_n admet une limite finie quand ξ tend vers l'infini, c'est-à-dire au point critique. Notre expérience avec la marche aléatoire et le modèle d'Ising en dimension 2 nous incite à penser que le facteur de proportionnalité contient des puissances de la maille du réseau. Comme la fonction de corrélation initiale était sans dimension ceci fixe la dimension de G_n. Précisément, si nous faisons le lien avec la discussion naïve, nous nous attendons à ce que G_n décrive les corrélations de $\phi = a^{1-d/2}\varphi$. Nous écrivons donc

$$a^{n(1-d/2)}\left\langle\varphi\left(\frac{x_1}{a}\right)\ldots\varphi\left(\frac{x_n}{a}\right)\right\rangle = C_n G_n(x_1,\ldots,x_n,m,\xi)$$

où C_n est une constante de normalisation sans dimension. Nous choisissons maintenant la normalisation de G_2, par exemple pour que à $\xi \longrightarrow \infty$, G_2 ressemble le plus possible au propagateur d'une particule libre. Toujours en tenant compte de la discussion naïve, il est naturel de poser $C_2 = Z_\phi$ et on normalise l'ensemble des corrélations par

$$a^{n(1-d/2)}\left\langle\varphi\left(\frac{x_1}{a}\right)\ldots\varphi\left(\frac{x_n}{a}\right)\right\rangle = Z_\phi^{n/2} G_n(x_1,\ldots,x_n,m,\xi)$$

en accord avec l'interprétation de G_n comme une fonction de corrélation à n points d'une théorie continue. Dans l'approche naïve, Z_ϕ était un pur nombre, mais nous admettons qu'à cause des fluctuations Z_ϕ est une fonction. Comme Z_ϕ n'a pas de dimension, il ne dépend que de la longueur de corrélation ξ. Finalement nous écrivons donc

$$a^{n(1-d/2)}\left\langle\varphi\left(\frac{x_1}{a}\right)\ldots\varphi\left(\frac{x_n}{a}\right)\right\rangle = Z_\phi(\xi)^{n/2} G_n(x_1,\ldots,x_n,m,\xi)$$

La dépendance de Z_ϕ en ξ est le changement majeur par rapport à la discusssion naïve. Il reste aussi des dépendances implicites dans des variables microscopiques qui caractérisent le modèle initial, c'est-à-dire par exemple dans les constantes de couplage microscopiques. Ainsi Z_ϕ et G_n dépendent de couplages notés collectivement λ. Les constantes de couplage microscopiques n'ont pas de sens physique à la limite continue et il est intéressant de les remplacer par des objets qui caractérisent le comportement des G_n. Par exemple on pourrait remplacer les variables λ par des variables g qui sont des valeurs des transformées de Fourier des fonctions G pour un choix bien précis des moments. Comme à moments nuls et masse nulle les corrélations peuvent être singulières (nous le verrons au chapitre suivant), il est utile d'introduire une nouvelle échelle arbitraire de masse notée μ. De plus on peut utiliser cette échelle pour faire des quantités g des variables sans dimension. Le fait d'interpréter les constantes de couplage explicitement en termes de quantités liées aux corrélations (et plus comme des coefficients dans une limite continue naïve) est un autre changement important. Lorsque ξ tend vers l'infini, le changement de variables entre les λ et les g devient singulier, et la théorie à la limite continue ne dépend plus que d'un nombre fini de couplages, exactement le nombre prédit par le raisonnement naïf. Ceci est une expression de l'universalité. Nous comprendrons mieux ce point en introduisant, suivant les idées de Wilson et Kadanoff, le concept de groupe de renormalisation et de point fixe.

Commençons par une remarque technique. Considérons un système de mécanique statistique dont l'espace de configurations est un produit de deux espaces. Par exemple, pour un système de spins, on peut décomposer l'ensemble des sites en deux sous-ensembles A et B et la donnée d'une configuration $\mathcal{C}$ de spins est équivalente à la donnée des deux sous-configurations $\mathcal{C}_A$ et $\mathcal{C}_B$. Nous écrivons $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B)$. Conservons les mêmes notations pour un système plus général, et notons $E(\mathcal{C})$ l'énergie de la configuration $\mathcal{C}$, en incluant le facteur β. La fonction de partition peut alors s'écrire

$$Z = \sum_{\mathcal{C}} \mathrm{e}^{-E(\mathcal{C})} = \sum_{\mathcal{C}_A} \left(\sum_{\mathcal{C}_B} \mathrm{e}^{-E(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B)} \right).$$

Définissons $E_A(\mathcal{C}_A)$ par

$$\sum_{\mathcal{C}_B} \mathrm{e}^{-E(\mathcal{C}_A, \mathcal{C}_B)} \equiv \mathrm{e}^{-E_A(\mathcal{C}_A)}.$$

Il est clair que

$$Z_A \equiv \sum_{\mathcal{C}_a} \mathrm{e}^{-E_A(\mathcal{C}_A)} = Z.$$

De plus si f est une fonction sur l'espace des configurations qui ne dépend pas de $\mathcal{C}_B$ on vérifie que

$$\langle f \rangle = \langle f \rangle_A$$

où le premier terme désigne la moyenne sur les $\mathcal{C}$ avec E et le second la moyenne sur les $\mathcal{C}_A$ avec E_A. Donc, si on ne s'intéresse qu'aux corrélations de variables indépendantes de $\mathcal{C}_B$, E et E_A décrivent la même physique.

L'idée du groupe de renormalisation est la suivante : décomposer les configurations en une partie contenant les fluctuations de grande longueur d'onde ($\mathcal{C}_A$) et une partie contenant celles de petite longueur d'onde $\mathcal{C}_B$. En sommant sur $\mathcal{C}_B$ on obtient une énergie E_A qui décrit la même physique que E pour les fluctuations de grande longueur d'onde. Cette idée peut être mise en œuvre de bien des façons. La plus intuitive ne se prête pas à des calculs quantitatifs simples, mais son importance physique est grande. Pour l'illustrer, plaçons-nous dans le cas où une configuration du système est donnée par une fonction $\varphi(x)$ où x décrit un réseau hypercubique de maille unité ou, de façon équivalente, par sa transformée de Fourier $\tilde{\varphi}(k)$ où les composantes de k sont plus petites que π en valeur absolue. Soit s un réel plus grand que 1 et soit $I_s(k)$ la fonction qui prend la valeur 1 si toutes les composantes de k sont plus petites que π/s en valeur absolue et 0 sinon (cette fonction est discontinue, mais on pourrait raffiner la discussion qui suit pour éliminer cette source potentielle de problèmes). Posons $\tilde{\varphi}_A(k) \equiv I_s(k/s)\tilde{\varphi}(k/s)$ et $\tilde{\varphi}_B(k) \equiv (1 - I_s(k))\tilde{\varphi}(k)$. Alors $\tilde{\varphi}(k) = \tilde{\varphi}_A(ks) + \tilde{\varphi}_B(k)$. Partant de l'énergie $S(\tilde{\varphi}(k))$ on obtient par sommation sur les variables $\tilde{\varphi}_B(k)$ une énergie $S_A(\tilde{\varphi}_A(k))$ qui à cause du changement d'échelle dans la définition de $\tilde{\varphi}_A$ décrit encore un système sur un réseau hypercubique de maille unité, mais dont la longueur de corrélation (exprimée en mailles de réseau) a été divisée par s.

On définit la transformation R_s par $S_A \equiv R_s(S)$. On peut itérer la transformation et il est clair que $R_s R_{s'} = R_{ss'}$. De là vient le terme “groupe de renormalisation”, qui est en fait un semi-groupe. Partant de la fonctionnelle S, $R_s(S)$ décrit une trajectoire dans l'espace fonctionnel (gigantesque donc peu maniable) de toutes les fonctionnelles d'énergie possibles pour un champ scalaire sur le réseau. C'est sur cette notion de trajectoire liée à un changement d'échelle dans un espace qui décrit les formes possibles de la fonctionnelle d'énergie que nous allons nous concentrer maintenant.

Nous pouvons analyser les changements d'échelle comme un temps dans un système dynamique. C'est le comportement de $R_s(S)$ pour $s \to \infty$ qui décrit la physique macroscopique du système initial. Le comportement à grande échelle peut bien sûr être très compliqué, avec des cycles-limites par exemple. Mais le comportement le plus simple est celui des trajectoires qui se terminent en un point-limite. Supposons donc que la trajectoire partant de S tende vers S^*. Alors S^* est invariant dans les transformations du groupe de renormalisation, d'où le nom d'énergie de point fixe. La longueur de corrélation pour S^* est donc nulle ou infinie. C'est dans le second cas (le seul qui nous intéresse) qu'il y a des corrélations macroscopiques. Le point fixe S^* étant donné, on peut lui associer sa variété critique. C'est l'ensemble des fonctionnelles d'énergie qui tendent vers S^* sous l'action du groupe de renormalisation. Tous les points de la variété critique de S^* décrivent la même physique à longue distance. Dans les cas usuels, les points critiques sont en petit nombre, ou s'organisent en tout cas de façon simple. Les variétés critiques sont en général assez grosses, c'est à dire de codimension finie (et assez petite) dans l'espace de toutes les fonctionnelles. Génériquement, si le système physique de départ a des paramètres de contrôle en nombre au moins égal à la codimension de la variété critique d'un point fixe S^*, on peut ajuster ceux-ci pour que le système soit dans la variété critique de S^*.

On voit apparaître les exposants critiques de façon très naturelle dans ce contexte. On peut concevoir les points de l'espace des fonctionnelles d'énergie comme paramétrés par les valeurs de tous les couplages possibles. Désignons par λ l'ensemble de ces couplages et écrivons S_λ pour S (avec par convention $S^* \equiv S_{\lambda *}$ et $S_{R_s(\lambda)} \equiv R_s(S_\lambda)$). Supposons que nous perturbions l'énergie de point fixe d'une quantité δS supposée petite dans un sens qui resterait à préciser. Il est possible de linéariser l'action du groupe de renormalisation au voisinage de $S^* = S - \delta S$. On peut écrire

$$R_s(\lambda^* + \delta\lambda) = \lambda^* + L_s(\delta\lambda) + o(\delta\lambda)$$

où L_s est une transformation linéaire. A nouveau on vérifie que $L_s L_{s'} = L_{ss'}$ et en particulier toutes ces transformations commutent. Si nous supposons que ces transformations sont diagonalisables, leurs valeurs propres sont aussi multiplicatives. Les valeurs propres de L_s sont donc de la forme s^{y_i}, décrivant la manière dont change le couplage $\delta\lambda_i$ dans une transformation du groupe de renormalisation. Il y a trois cas à distinguer. Si $y_i < 0$ les transformations R_s diminuent $\delta\lambda_i$. Ceci signifie que perturber S^* avec $\delta\lambda_i$ ne fait pas sortir de la variété critique de S^*. Par contre si $y_i > 0$, perturber S^* avec $\delta\lambda_i$ fait sortir du bassin critique et l'action des transformations R_s amplifie l'écart. De telles perturbations sont dites pertinentes (*relevant* en anglais). Si $y_i = 0$ on dit que la perturbation est marginale. Dans ce cas notre analyse purement linéaire ne permet pas de conclure. Par exemple, dans le cas du modèle d'Ising à deux dimensions, nous avons montré que la température est une perturbation pertinente. Dès qu'on l'écarte de sa valeur critique, il n'y a plus de corrélations à longue distance. Il est clair que l'exposant y_T associé à une perturbation en température est l'inverse de l'exposant que nous avons appelé ν (en effet la longueur de corrélation varie comme $1/s$). Plus généralement les y_i sont reliés aux exposants critiques. Le nombre de y_i positifs est appelé le degré de criticité.

Même si la discussion précédente montre que ce n'est pas l'analyse dimensionnelle naïve qui fixe les exposants y_i en général, il est à peu près clair que cette analyse dimensionnelle joue un rôle, et on peut s'attendre à ce que celui-ci soit plus important dans les situations où les fluctuations deviennent négligeables. Par exemple pour le modèle d'Ising ou le modèle $O(n)$ si $d > 4$ on peut vérifier que c'est bien le cas. A $d = 4$ les fluctuations commencent à jouer un petit rôle, mais on peut espérer que l'analyse dimensionnelle pure est encore l'effet dominant, et ceci explique que le passage naïf à la limite continue puisse donner une idée correcte de la forme de la fonctionnelle d'énergie de point fixe à la vraie limite continue. Comme nous l'avons déja remarqué, cette limite continue décrit un voisinage infinitésimal du point critique. Toutes les perturbations non pertinentes ont disparu, et les autres ont été soigneusement ajustées pour conserver une longueur de corrélation macroscopique finie. En passant à la limite continue, nous passons d'un espace fonctionnel gigantesque à un espace avec quelques paramètres, beaucoup plus maniable, et qui permet de représenter correctement la physique à longue distance du modèle initial. Comme nous le verrons au chapitre suivant, il n'est pas facile de donner un sens à la théorie continue. Mais nous verrons que c'est possible justement parce que la théorie est la limite continue d'une théorie microscopique. C'est-à dire que si nous essayons d'ajouter à la théorie continue des couplages non pertinents, la théorie devient pathologique.

Pour finir cette discussion, notons qu'il reste des traces des transformations de renormalisation dans la théorie continue. Pour des raisons techniques, on les obtient en disant que l'échelle de masse μ est arbitraire, mais leur conséquence essentielle est de prédire que les fonctions de corrélation $G_n\left(sx_1, ..., sx_n, m, g, \mu\right)$ et $G_n\left(x_1, ..., x_n, m(s), g(s), \mu\right)$ (où $m(s)$ et $g(s)$ sont des analogues continus de $R_s(\lambda)$) sont proportionnelles, ce qui est exactement le genre de relation attendu. Cette équation impose des relations dans la structure des différents ordres de la théorie des perturbations. C'est le point crucial qui permet d'extraire de l'information du développement en apparence absurde que nous avions obtenu avec les corrections à la méthode du col. Ceci sera illustré dans la deuxième partie de ce cours. Dans le chapitre suivant, nous allons essayer de travailler directement dans la théorie continue et des problèmes de divergence vont nous amener à suivre pas à pas le chemin que nous avons choisi dans ce chapitre, mais en quelque sorte en sens inverse.

III. THEORIE DES CHAMPS CONTINUE

Il est temps de passer à l'étude des propriétés élémentaires de renormalisation des théories des champs continues. Il est facile de se convaincre que le passage naïf à la limite continue, que nous avons vu à la fin du chapitre précédent, se ramène entièrement à des questions d'analyse dimensionnelle élémentaire. L'étude des fluctuations est beaucoup plus délicate et subtile et nous occupera jusqu'à la fin de ce cours. Le Professeur Mahoux utilisera cette étude pour obtenir des résultats quantitatifs concernant les phénomènes critiques.

A. REGLES DE FEYNMAN

1) Règles de Feynman dans l'espace des impulsions, cas discret

Nous avons vu au II.C que l'évaluation perturbative de la fonction de partition et des corrélations pouvait se reformuler en termes de graphes de Feynman. Nous avons maintenant affaire à des théories invariantes par translation, et il est commode de passer dans l'espace des impulsions pour formuler le calcul des perturbations. On part de l'action (14). La limite continue viendra ensuite. Dans $V(\varphi)$ il est habituel d'extraire le terme quadratique en φ. On écrit donc

$$V(\varphi) = \frac{\lambda_2}{2}\varphi^2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_{2n}}{(2n)!}\varphi^{2n} \equiv \frac{\lambda_2}{2}\varphi^2 + V_I(\varphi)$$

Pour l'instant nous pouvons supposer que la maille du réseau vaut 1. On exprime $S(\varphi)$ en termes des variables de Fourier en posant

$$\tilde{\varphi}(k) = \sum_{x\in R} \mathrm{e}^{ikx}\varphi(x) \qquad \varphi(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\mathrm{e}^{-ikx}\tilde{\varphi}(k)$$

et des définitions analogues pour K et j.

On vérifie aisément que

$$\sum_{x\in R} \varphi^n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k_1}{(2\pi)^d}\cdots\frac{\mathrm{d}^d k_n}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(k_1)\ldots\tilde{\varphi}(k_n)(2\pi)^d \sum_{v\in R^*} \delta^d(k_1+\ldots+k_n-v)$$

Dans le cas $n=2$ la seule possibilité est $v=0$. On obtient aussi

$$\sum_x \varphi(x)j(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(k)\tilde{j}(k)$$

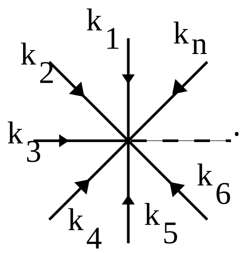
$$\sum_x \varphi(x)K(x-x')\varphi(x') = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\tilde{\varphi}(k)\tilde{K}(k)\tilde{\varphi}(-k)$$

Comme on s'y attendait, les termes quadratiques sont diagonaux dans l'espace des impulsions, ce qui rend l'intégration gaussienne triviale, au moins formellement. Il est important de remarquer que nous sommes passés à une infinité de variables, et que maintenant seul le second membre de la formule (11) a un sens bien défini en tant que développement en puissances de j et des couplages. Le déterminant dans (11) est une pure normalisation qu'on laisse de côté (il revient à considérer $Z(j,\lambda_2,\lambda_4,\ldots,\lambda_{2n},\ldots)Z^{-1}(0,\lambda_2,0,\ldots,0,\ldots)$ à la place de $Z(j,\lambda_2,\lambda_4,\ldots,\lambda_{2n},\ldots)$, c'est-à-dire à poser par convention $Z(0,\lambda_2,0,\ldots,0,\ldots)\equiv 1$, convention que nous retenons pour la suite).

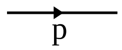
Finalement si nous écrivons

$$Z(j)=\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{p!}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{d}^dk_1}{(2\pi)^d}\dots\frac{\mathrm{d}^dk_p}{(2\pi)^d}\Lambda_p\left(k_1,\dots,k_p\right)\tilde{j}\left(k_1\right)\dots\tilde{j}\left(k_p\right)$$

les fonctions $\Lambda_p\left(k_1,\dots,k_p\right)$ ont un développement en puissances des couplages $\lambda_4,\lambda_6,\dots$ donné par des règles de Feynman. Les diagrammes sont construits avec des propagateurs et des vertex. Le vertex à n pattes (en général n sera pair dans la suite) donne un facteur $-\lambda_n(2\pi)^d\sum_{v\in R^*}\delta\left(k_1+\dots+k_n-v\right)$ associé à

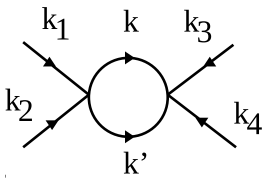


Le propagateur donne un facteur $\frac{1}{\tilde{K}(k)+\lambda_2}$ associé à



La valeur d'un diagramme est obtenue en intégrant les impulsions sur toutes les lignes internes, et en divisant par un nombre de symétrie (nombre de façons inéquivalentes de faire le diagramme) dont nous reparlerons plus loin. Les contributions à Λ_p proviennent des diagrammes à p pattes externes.

Par exemple le diagramme



contribue à la fonction $\Lambda_4\left(k_1,\dots,k_4\right)$. Au facteur de symétrie près, ce diagramme vaut

$$\lambda_4^2\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{K\left(k_i\right)+\lambda_2}\right)\int\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^dk'}{(2\pi)^d}\frac{1}{K(k)+\lambda_2}\frac{1}{K\left(k'\right)+\lambda_2}(2\pi)^d\sum_{v\in R^*}\left(k_1+k_2-k-k'-v\right)$$
$$(2\pi)^d\sum_{w\in R^*}\delta\left(k+k'+k_3+k_4-w\right)$$

On voit sur cet exemple, et la généralisation est évidente, qu'un diagramme produit un facteur

$$\prod_{\alpha}\left(\frac{1}{K\left(k_\alpha\right)+\lambda_2}\right)(2\pi)^d\sum_{w\in R^*}\delta\left(\sum_{\alpha}k_\alpha-w\right)$$

où α décrit les lignes externes.

Le lecteur est invité à faire de nombreux exemples.

A partir de $Z(j)$ on peut définir d'autres fonctions qui ont un développement diagrammatique où ne contribuent que certaines classes de diagrammes. Par exemple on peut poser $\log Z(j) = W(j)$ et développer

$$W(j) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int \frac{\mathrm{d}^d k_1}{(2\pi)^d} \dots \frac{\mathrm{d}^d k_p}{(2\pi)^d} G_p \left(k_1, \dots, k_p\right) \tilde{j} \left(k_1\right) \dots \tilde{j} \left(k_p\right)$$

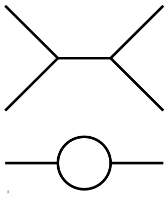
Il n'est pas trop difficile de se convaincre que $W(j)$ (qui est relié à l'énergie libre) ne fait intervenir que les diagrammes connexes. A part ça les règles sont les mêmes. Par transformation de Legendre on peut définir $\Gamma\left(\varphi_{\mathrm{cl}}\right)$ de la façon suivante

$$\varphi_{\mathrm{cl}}(x) = \frac{\partial W}{\partial j(x)} \quad \text{et} \quad \Gamma\left(\varphi_{\mathrm{cl}}\right) = \sum_x j(x) \varphi_{\mathrm{cl}}(x) - W(j)$$

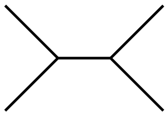
On peut montrer que

$$\Gamma\left(\varphi_{\mathrm{cl}}\right) = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p!} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{d}^d k_1}{(2\pi)^d} \dots \frac{\mathrm{d}^d k_p}{(2\pi)^d} \Gamma_p \left(k_1, \dots, k_p\right) \tilde{\varphi}_{\mathrm{cl}} \left(k_1\right) \dots \tilde{\varphi}_{\mathrm{cl}} \left(k_p\right)$$

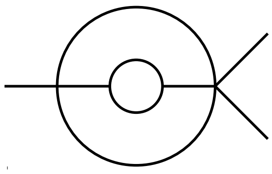
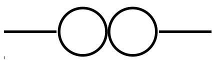
a un développement diagrammatique ne faisant intervenir que les diagrammes dits une particule irréductibles (noté 1PI). La signification de cette appellation est que ces diagrammes restent connexes quand on coupe une ligne interne quelconque. Par exemple (considéré comme un seul diagramme)



n'est pas connexe,



est connexe mais pas 1PI, alors que

 et 

sont 1PI. Les règles de Feynman sont inchangées, à part le fait qu'il apparaît un signe global et que l'on omet les propagateurs pour les lignes externes (en toute rigueur ceci n'est pas vrai pour la fonction à 2 points, comme nous le verrons plus loin). Il est maintenant facile d'imaginer les règles de Feynman décrivant la théorie continue.

2) Règles de Feynman dans l'espace des impulsions, cas continu

Posons $\phi_0 = \sqrt{Z_g}\ \phi(x)$, $Z_\phi Z_2 g_2 = m_0^2$ et $Z_\phi^n Z_{2n} g_{2n} = g_0^{(2n)}$. Les règles de Feynman décrivant les corrélations du champ $\phi_0(x)$ s'obtiennent de manière simple : maintenant les vertex à n pattes donnent un facteur $-g_0^{(n)}\delta(k_1+...+k_n)$ et le propagateur est simplement $\frac{1}{p^2+m_0^2}$. On intègre sur tous les moments internes. Les facteurs de symétrie sont inchangés.

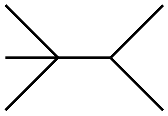
Il est clairement bien plus économique de calculer $W(j)$ qui engendre les corrélations connexes, que $Z(j)$, qui fait intervenir tous les diagrammes.

Comme dans le cas discret, chaque diagramme produit un facteur $(2\pi)^d\delta(\sum k_\alpha)$ où les k_α sont les impulsions externes. Dans la suite nous incluons ce terme dans la définition des fonctions Λ_n, G_n, Γ_n. Lorsqu'on écrit une telle fonction on suppose donc que la somme des arguments est nulle. On écrit aussi $G_2(p)$ pour $G_2(p,-p)$.

On voit que tout ceci donne des règles de Feynman dans l'euclidien très analogues aux règles usuelles de la théorie des champs dans le minkovskien.

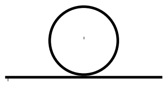
B. DIVERGENCE DES DIAGRAMMES DE FEYNMAN ET COMPTAGE DES PUISSANCES

Parmi les diagrammes intervenant dans le calcul des fonctions de corrélation connexes, il y en a de plus ou moins compliqués. Une classe de diagrammes très simples est la classe des diagrammes en arbre. Ce sont les diagrammes dont le graphe correspondant n'a pas de circuit fermé. Par exemple

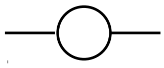


est un diagramme en arbre contribuant à la fonction à cinq points. Il fait intervenir un vertex à quatre pattes et un vertex à trois pattes. Il est facile de se convaincre que pour G_2 le seul diagramme en arbre est

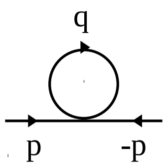
correspondant à $\left(k^2+m_0^2\right)^{-1}$. Tous les autres diagrammes contiennent des boucles. Les plus simples sont



qui fait intervenir une boucle et un vertex à quatre pattes, et



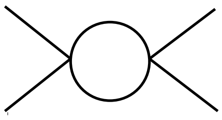
qui fait intervenir deux vertex à trois pattes (il n'existent que si la théorie contient ce type de vertex). En oubliant les nombres de symétrie, le diagramme



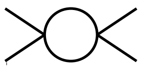
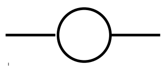
contribue, au facteur $\left(p^2+m_0^2\right)^{-2}$ près, à

$$\int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2+m_0^2}\ .$$

On suppose $m_0^2 > 0$. On voit que cette intégrale diverge dès que $d \geq 2$, ce que nous supposons. Donc notre théorie des perturbations pose de graves problèmes. On voit de même aisément que l'expression associée au diagramme



diverge pour $d \geq 4$. Aux propagateurs externes près

 et 

donnent la même expression. Ceci est bien sûr décourageant mais une analyse soigneuse va nous montrer que la situation n'est pas toujours désespérée.

1) Quelques considérations sur G_2

A l'ordre des arbres $G_2(p) = \left(p^2 + m_0^2\right)^{-1}$. Nous avons vu au Chapitre 1 que m_0 est lié à la longueur de corrélation dans le cadre d'une théorie libre (où S est quadratique). Rappelons qu'en effet

$$G_2(x) = \int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{e}^{ipx}}{p^2 + m_0^2}$$

qui décrit les corrélations à deux points se comporte pour $r = m_0|x|$ grand comme

$$\frac{1}{2} \frac{m_0^{2-d}}{(2\pi)^{\frac{d-1}{2}}} r^{1-\frac{d}{2}} \mathrm{e}^{-r}$$

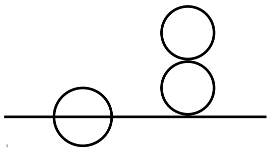
Donc $G_2(x)$ décroît exponentiellement avec une longueur de corrélation m_0^{-1}. Ceci donne un sens physique à m_0. Revenons un instant à la théorie sur le réseau de maille a. A l'ordre des arbres, $G_2(p) = \frac{1}{K(p)+\lambda_2}$ définit une certaine longueur de corrélation, mais il est à peu près clair que la longueur de corrélation obtenue en tenant compte des autre diagrammes n'est pas la même. Ceci signifie qu'à cause des corrections dues aux fluctuations les paramètres physiques ne sont pas reliés de façon évidente aux paramètres qui apparaissent dans la fonction S. En passant à la limite continue sans tenir compte des fluctuations de façon correcte, nous avons cherché à définir une limite pour S décrivant les fluctuations aux grandes échelles non pas en intégrant sur les fluctuations de petite échelle, comme le dicte la formule pour $Z(j)$, mais en les gardant fixes. Il reste un certain espoir qu'une autre méthode donne des résultats plus cohérents. Au lieu d'utiliser les paramètres de contrôle du système pour obtenir des valeurs finies pour la forme de S à la limite continue (a tend vers zéro), nous pourrions utiliser ces paramètres de contrôle pour obtenir des valeurs finies des quantités physiques (longueur de corrélation, etc...) à la limite continue. Peut être alors les fonctions de corrélation sont elles aussi finies à la limite continue.

La mise en oeuvre de ce programme n'est pas évidente, et nous allons commencer par quelques remarques sur G_2.

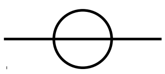
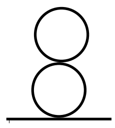
Si $\Sigma(p)$ représente la somme des diagrammes 1PI à deux pattes externes non triviaux (où les propagateurs externes sont omis) on peut écrire

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + m_0^2}\Sigma(p)\frac{1}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + m_0^2}\Sigma(p)\frac{1}{p^2 + m_0^2}\Sigma(p)\frac{1}{p^2 + m_0^2} + \ldots \tag{1}$$

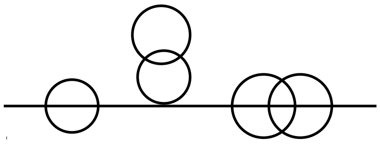
L'équation (1) signifie que tout diagramme pour G_2 est obtenu en recollant des parties 1PI. Par exemple



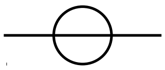
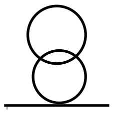
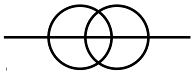
s'obtient en recollant

 et  .

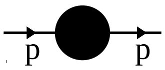
De même



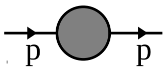
s'obtient en recollant

 ,  et  .

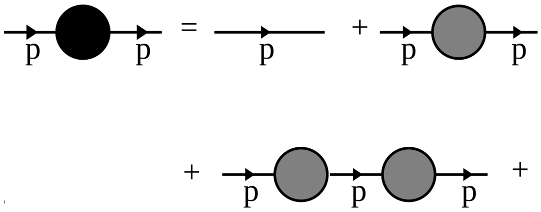
Dans le langage des diagrammes, si l'on représente $G_2(p)$ par



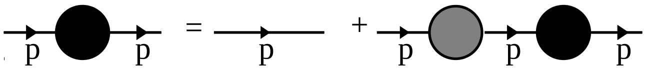
et $\Sigma(p)$ par



on a donc



Ceci est une série géométrique qui donne



soit

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2} + \frac{1}{p^2 + m_0^2} \Sigma(p) G_2(p),$$

relation qu'on obtient aussi en sommant (1) explicitement.

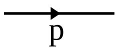
Finalement

$$G_2(p) = \frac{1}{p^2 + m_0^2 - \Sigma(p)}$$

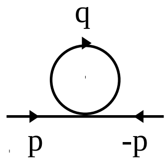
Ce calcul était formel en ce sens que nous ne nous intéressions pas au fait que les diagrammes étaient convergents ou non. Cependant, il montre que si nous savons par un moyen quelconque donner un sens à $\Sigma(p)$, nous saurons en faire autant pour $G_2(p)$. (Incidemment, nous venons de rencontrer l'exception à la règle pour le calcul de Γ_2. En effet on peut montrer que

$$G_2(p) = \frac{1}{\Gamma_2(p)} \ .$$

Donc $\Gamma_2(p) = p^2 + m_0^2 - \Sigma(p)$. Le diagramme



qui avec nos règles pour l'action effective Γ est associé à $-\left(p^2+m_0^2\right)$, compte en fait pour $+\left(p^2+m_0^2\right)$). Restreignons-nous pour l'instant à la théorie φ^4 à $d=4$. On pose $g_0 \equiv g_0^{(4)}$. Au premier ordre en g_0 il n'y a qu'un seul diagramme contribuant à $\Sigma(p)$. C'est

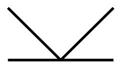


.

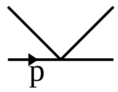
Si l'on appelle q le moment interne, ce diagramme donne une contribution proportionnelle à

$$-g_0 \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m_0^2} \; .$$

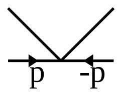
Il manque un facteur numérique qui correspond aux différentes manières de construire ce diagramme. Au départ λ apparaît avec $1/4!$, mais partant de



il y a 4 choix possibles pour placer



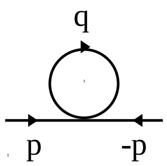
l'impulsion entrante, puis 3 choix pour placer l'impulsion sortante et arriver à



.

Ensuite il n'y a plus rien d'arbitraire, et il faut lier les deux pattes restantes avec un propagateur.

Le bilan est $4 \times 3/4! = 1/2$. Nous verrons d'autres exemples plus loin. Finalement



est associé à

$$-\frac{g_0}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m_0^2} \; .$$

Bien sûr cette intégrale diverge pour q grand, mais son pendant sur le réseau donne une contribution finie. Sans retourner explicitement sur le réseau, on peut imaginer que la théorie continue décrit bien le comportement à q petit, mais qu'elle devient inexacte à q grand, donc que l'intégrale doit être coupée pour $|q| > \Lambda$. Le "cut-off" Λ joue un rôle similaire à l'inverse de la maille du réseau $1/a$. Au premier ordre en λ_0, on a donc

$$\frac{1}{G_2(p)} = p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2} \int^{\Lambda} \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4} \frac{1}{q^2+m_0^2}$$

Si on pose

$$m^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{2}\int^\Lambda \frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\frac{1}{q^2+m_0^2} ,$$

on constate que, au premier ordre de la théorie des perturbations, la longueur de corrélation est modifiée. C'est m et non plus m_0 qui décrit les propriétés physiques mesurables du système. Quand Λ tend vers $+\infty$, la relation entre m^2 et m_0^2 devient singulière. En passant naïvement à la limite continue nous avons donné une valeur finie à m_0^2, mais en fait la quantité observable est (au moins à cet ordre de la théorie des perturbations) m^2. Nous décidons donc que c'est m^2 qui est fini à la limite continue. Nous allons redire les choses de façon équivalente dans le cas où le cut-off provient de la théorie sur réseau et pour d arbitraire.

Au lieu d'ajuster les paramètres de contrôle pour que λ_2/a^2 prenne une valeur finie m_0^2, il faut les ajuster pour que (au premier ordre de la théorie des perturbations)

$$\frac{\lambda_2}{a^2} + \frac{\lambda_4}{2}a^{d-2}\int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{\tilde{K}(q)+\lambda_2}$$

qui est lié (à cet ordre) à la longueur de corrélation dans le système, prenne une valeur finie m^2.

Nous voyons donc que les paramètres qui sont apparus lors du passage naïf à la limite continue (normalisation de ϕ et valeurs de couplages) ne sont que des artifices pour écrire la théorie des perturbations.

Un point intéressant qui permettra une certaine souplesse est le suivant. A l'ordre d'une boucle nous avons trouvé qu'exprimé en termes de quantités physiques G_2 vaut $\left(p^2+m^2\right)^{-1}$. Nous avons obtenu ce résultat en coupant l'intégrale à Λ. Nous avons obtenu le même résultat en prenant la théorie sur le réseau, avec cut-off $\Lambda = 1/a$. Le lien entre m^2 et les paramètres de la théorie à cut-off est un peu différent, mais le résultat dans le continu ne porte plus de trace de cette différence. On peut choisir encore d'autres manières d'exprimer qu'il y a un facteur de coupure à grand moment. Par exemple

$$\frac{1}{q^2+m_0^2} = \int_0^\infty \exp\left(-t\left(q^2+m_0^2\right)\right)\mathrm{d}t .$$

On pourrait remplacer ceci par

$$\int_{1/\Lambda^2}^\infty \exp\left(-t\left(q^2+m_0^2\right)\right)\mathrm{d}t = \frac{\exp\left(-\frac{q^2+m_0^2}{\Lambda^2}\right)}{q^2+m_0^2} .$$

Tant que Λ est fini le comportement à grand moment est beaucoup plus doux. On obtiendrait

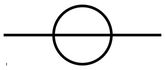
$$\frac{1}{G_2(p)} = p^2 + m_0^2 + \frac{g_0}{2}\int_{1/\Lambda^2}^\infty \mathrm{d}t\int\frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\exp\left(-t\left(q^2+m_0^2\right)\right)$$

au premier ordre de la théorie des perturbations. Le lien avec la vraie longueur de corrélation serait à cet ordre

$$m^2 = m_0^2 + \frac{g_0}{2}\int_{1/\Lambda^2}^\infty \mathrm{d}t\int\frac{\mathrm{d}^4 q}{(2\pi)^4}\exp\left(-t\left(q^2+m_0^2\right)\right)$$

(L'intégration sur q peut être faite explicitement, mais ce n'est pas notre propos ici). Mais $G_2(p)$ serait toujours égal à $\left(p^2+m^2\right)^{-1}$.

Cette discussion était encore relativement simple, et il faut être conscient que lorsqu'on s'autorise à aller plus loin dans la théorie des perturbations, les choses se compliquent. Aux ordres suivants $\Sigma(p)$ ne contribue pas simplement à changer la longueur de corrélation. Par exemple, même une fois qu'on a réussi à faire le travail de tout réexprimer en termes de quantités physiques, le diagramme



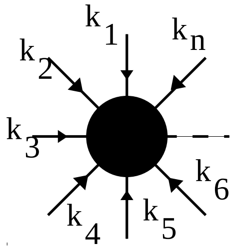
donne une contribution non triviale en p. Nous verrons cela en détail plus loin.

2) Le rôle des fonctions 1PI

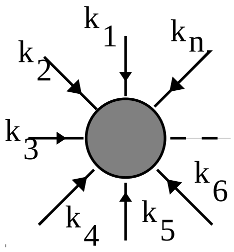
Nous avons vu dans le paragraphe précédent que $\Sigma(p)$, somme des diagrammes 1PI non triviaux, permettait de calculer $G_2(p)$ par la relation

$$G_2(p) = \frac{1}{\Gamma_2(p)} = \frac{1}{p^2 + m_0^2 - \Sigma(p)} \ .$$

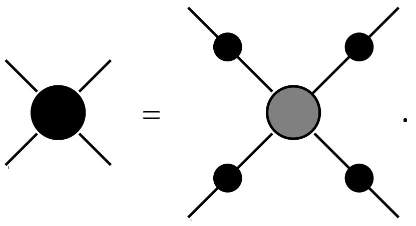
De la même manière, toutes les fonctions connexes s'expriment à l'aide des fonctions 1PI. C'est une conséquence de la formule pour la transformée de Legendre. Mais cela se voit très simplement sur les exemples. Si nous représentons G_n par



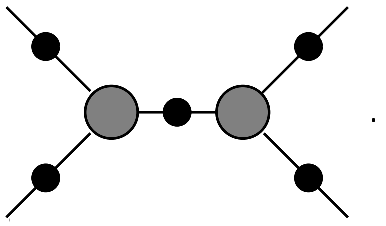
et Γ_n par



il est facile (toujours en décomposant les diagrammes en parties 1PI comme pour faire le lien entre G_2 et Γ_2) de se convaincre que



Si la théorie contenait des vertex φ^3, il faudrait ajouter à ceci trois diagrammes du type



En général G_n est donné par la somme des diagrammes en arbre avec n pattes externes, en prenant

$$G_2 = \frac{1}{\Gamma_2}$$

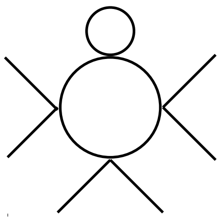
comme propagateur et Γ_m comme vertex à m points. Ceci montre que si nous trouvons une procédure (la renormalisation) pour rendre finies les fonctions 1PI, les fonctions de Green connexes (et les fonctions de Green générales) seront finies elles aussi. Ceci explique que dans la suite nous nous concentrerons sur les fonctions 1PI.

3) Le comptage de puissances

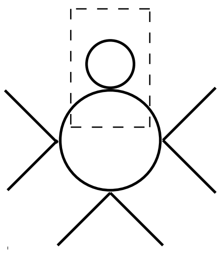
Nous allons maintenant déterminer le comportement à grands moments des intégrands apparaissant dans un diagramme de Feynman.

Imaginons que nous dilatons les impulsions internes et externes et les masses d'un facteur λ. Les éléments d'intégration sont multipliés par λ^d, les lois de conservation par λ^{-d} et les propagateurs par λ^{-2}. Supposons le diagramme connexe, avec I lignes internes (donc I éléments d'intégration et I propagateurs), V_n vertex à n pattes (donc $\sum_n V_n - 1$ lois de conservation à cause de la conservation globale). Notons au passage qu'il est possible d'utiliser les lois de conservation pour exprimer tous les moments internes en fonction de $I - \sum V_n + 1$ d'entre eux bien choisis et des moments externes.

Il est clair que $I - \sum V_n + 1$, nombre de moments internes indépendants, compte le nombre de boucles du diagramme, noté L. L'effet de la dilatation est de multiplier l'intégrand par $\lambda^{I(d-2)-(\sum_n V_n - 1)d}$. Lorsque les moments internes sont très grands, les masses et les moments externes sont négligeables donc le raisonnement précédent montre que le diagramme ne peut être convergent que si $I(d-2) - (\sum_n V_n - 1)\, d < 0$. Cette condition est nécessaire mais pas suffisante, car il peut y avoir des sous-diagrammes infinis. Par exemple pour le diagramme



on a $I = 5$, $L = 2$ d'où $-2I + dL < 0$ pour $d = 4$. Cependant la partie



diverge, et tout le diagramme avec elle. Pour qu'un diagramme soit convergent, il faut que la condition de convergence s'applique à tous les sous-diagrammes. On peut montrer (c'est non trivial) que ceci est une condition nécessaire et suffisante. Nous appellerons un tel diagramme un diagramme squelette.

Il existe une relation purement topologique entre le nombre de vertex, le nombre de lignes internes et le nombre de lignes externes, noté E. Chaque patte de vertex est lié à une ligne interne ou externe. Chaque ligne interne est liée à deux pattes et chaque ligne externe à une patte. Donc $\sum_n V_n$, nombre total de pattes, est égal à $2I + E$. On peut alors éliminer I et obtenir pour le degré superficiel de divergence $I(d-2) - \left(\sum_n V_n\right) d$ la valeur $\frac{d-2}{2}\left[\sum_n V_n - E - \frac{2d}{d-2}\left(\sum V_n - 1\right)\right]$. On suppose $d > 2$.

A nombre de pattes externes E fixé, si la théorie contient des vertex à n pattes avec $n > \frac{2d}{d-2}$, on peut obtenir des degrés de divergence superficiels de plus en plus grands. Donc toutes les fonctions Γ_m recevront des contributions de diagrammes superficiellement divergents. Dans l'analyse à une boucle de G_2 nous avons vu qu'un des moyens de donner un sens à une expression divergente était d'absorber la divergence dans la définition d'une quantité physique. Donc pour rendre finie une théorie dans laquelle tous les Γ_m contiennent des contributions venant de diagrammes superficiellement divergents, il faut disposer d'une infinité de paramètres physiques ajustables. Une telle théorie est dite non renormalisable. Comme nous l'avons déjà remarqué, une théorie sur le réseau décrivant un modèle de mécanique statistique n'a en général qu'un petit nombre de paramètres de contrôle. Si cette théorie sur réseau admet un régime où elle est décrite par une théorie continue, on peut donc s'attendre à ce qu'elle ne soit pas du type ci-dessus mais du type renormalisable. On s'attend donc à ce que le nombre maximum de pattes des vertex, décrivant la limite continue, soit inférieur ou égal à $\frac{2d}{d-2}$. Nous venons de retrouver dans un cadre plus correct (car tenant compte des fluctuations) le résultat obtenu en passant naïvement à la limite continue. Nous pouvons même rendre ceci un peu plus précis. Les fonctions superficiellement divergentes sont celles pour lesquelles $-E + \frac{2d}{d-2} + \sum_n \left(n - \frac{2d}{d-2}\right) V_n \geq 0$. En particulier, il faut avoir $E \leq \frac{2d}{d-2}$. Donc les fonctions superficiellement divergentes correspondent aux vertex présents dans la théorie.

Regardons par exemple φ^4 à quatre dimensions. Les fonctions de Green non triviales ont un nombre pair d'arguments. Dans ce cas, le degré superficiel de divergence est $4 - E$. Le cas $E = 0$ est sans intérêt. Le propagateur a une divergence quadratique et la fonction à quatre points une divergence logarithmique. Intuitivement, pour supprimer ces divergences, il faut trois paramètres physiques ajustables. En effet, en ajustant un paramètre, on supprime la divergence de la fonction à quatre points. Mais en ajusant un second paramètre, on ne supprime pas toutes les divergences du propagateur. Il reste une divergence logarithmique qui nécessite un troisième paramètre. Remarquons que la théorie continue contient elle aussi trois paramètres ajustables, la constante de couplage, la masse et la normalisation du champ. Le lecteur est invité à faire le même genre de décompte pour φ^3 à six dimensions ou φ^6 à trois dimensions.

Ces trois théories sont dites exactement renormalisables au sens du comptage de puissances car le degré du plus haut vertex est exactement $\frac{2d}{d-2}$. Si ce degré est strictement inférieur à $\frac{2d}{d-2}$ la théorie sera dite super renormalisable ; le comptage de puissances dans ce cas montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de diagrammes superficiellement divergents.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser la façon dont se fait le passage à la limite continue. Revenons sur le réseau pour fixer les idées. La maille a est très petite devant l'unité de longueur macroscopique que nous prenons égale à 1. Dans ce cas on peut faire tendre a vers 0 sans changer le système physique, simplement en changeant l'unité macroscopique. Nous repartons de

$$S(\varphi) = \sum_{x,x' \in R} \frac{1}{2}\varphi(x) K(x,x')\, \varphi(x') + \sum_{x \in R} V(\varphi(x))$$

Comme nous l'avons vu auparavant, si les paramètres de contrôle sont génériques, la longueur de corrélation est d'ordre a. Ceci est vrai même en tenant compte des fluctuations. Ajustons alors les paramètres de contrôle pour que la longueur de corrélation et les autres quantités physiques aient des valeurs données d'ordre unité dans l'échelle macroscopique. Prenant une échelle macroscopique de plus en plus grande (ou ce qui revient au même en faisant tendre a vers 0) en laissant fixes les paramètres physiques exprimés dans l'échelle macroscopique, on s'attend à obtenir des fonctions de corrélation macroscopiques finies. C'est aussi dans ce cadre que l'on s'attend à pouvoir décrire le système microscopique par une théorie continue. Nous avons déjà écrit la théorie continue naïve associée à S. Le point est que maintenant, avant de passer à la limite $a = 0$, il faut tout exprimer en fonction des quantités physiques, et en particulier changer la normalisation de φ. On obtient

$$S = a^d \left(\sum_{x,x'} \frac{1}{2} Z_\phi \phi(x) \hat{K}_a (x - x') \phi(x') + \sum_x \sum_{1 \leq n < \frac{d}{d-2}} Z_\phi^n Z_{2n} \frac{g_{2n}}{(2n)!} \phi^{2n}(x) + ... \right)$$

Mais maintenant si la normalisation de ϕ et les g_{2n} sont pris comme paramètres physiques Z_ϕ et les Z_{2n} ne sont pas de simples nombres mais des fonctions (sans dimension) de a, des g_{2n} et des couplages d'ordre supérieur que nous n'avons pas écrits.

Dire que les g_{2n} sont des paramètres physiques ne les fixe pas de façon univoque, car on demande que les résultats des expériences macroscopiques fassent intervenir les g_{2n}, mais on n'a pas encore décidé que telle expérience précise mesure g_{2n}. Les vertex d'ordre supérieur, que nous n'avons pas écrits, contiennent des puissances positives de a. Si on change les constantes de couplages associées, on change Z_ϕ et les Z_{2n}, mais lors du passage à la limite $a \to 0$, on s'attend à ce que ce changement ne joue aucun rôle. Ceci signifie que la théorie macroscopique est peu sensible aux détails de la théorie microscopique. Dans le même ordre d'idées, certains termes dans $\hat{K}_a$ contiennent des puissances positives de a, et changer ces termes change Z_ϕ et Z_{2n} mais ne change pas la limite continue.

Nous venons de mentionner des propriétés qui rappellent les remarques que nous avons faites lors de la discussion sur la divergence à une boucle de la fonction à deux points pour φ^4 à quatre dimensions. Néanmoins, sous la forme générale ci-dessus, elles n'ont pas pour l'instant été établies rigoureusement. Elles ne sont prouvés que dans un sens plus faible. Mais elles sont cruciales pour la compréhension intuitive des phénomènes critiques et de la théorie de la renormalisation.

Une remarque importante s'impose. Nous avons explicitement besoin de l'échelle de longueur macroscopique pour définir les quantités physiques. Si nous changeons cette unité macroscopique, nous changeons la définition des couplages, et ce changement ne disparaît pas lorsqu'on fait tendre la maille du réseau vers 0. Ceci est à la base des propriétés dites de groupe de renormalisation, que nous verrons plus loin.

Pour finir, nous notons une conséquence cruciale de la forme de l'action à la limite continue. C'est une forme identique à celle de l'action à la limite continue naïve (il y a les mêmes vertex). On fait le développement ordre par ordre dans les couplages g_{2n}. A l'ordre trivial il n'y a que des diagrammes en arbre, qui sont finis. En particulier, à cet ordre, les vertex élémentaires donnent

$$g_{2n} Z_\phi^n (a, 0, ..., 0) Z_{2n}(a, 0, ..., 0)$$

Il est donc naturel de prendre $Z_\phi(a, 0, ..., 0) = Z_{2n}(a, 0, ..., 0) = 1$. Ensuite ordre par ordre dans les couplages, on fixe Z_ϕ et Z_{2n} de telle sorte que les g_{2n} soient bien les quantités physiques voulues et que la limite $a \longrightarrow 0$ soit finie. Nous mettrons ce programme en oeuvre plus tard. Nous avons fait le décompte des fonctions 1PI superficiellement divergentes et remarqué que les Z_ϕ et Z_{2n} nous donnaient le bon nombre de paramètres ajustables pour les rendre finies. Mais nous avons vu que toutes les fonctions de Green avaient des contributions de diagrammes divergents à cause de sous-diagrammes 1PI superficiellement divergents. Le fait que l'action ait gardé la même forme que l'action naïve est le point fondamental qui assure qu'en ajustant Z_ϕ et les Z_{2n} pour rendre finies les fonctions 1PI superficiellement divergentes, on rend toutes les fonctions de Green finies. La preuve rigoureuse de ce fait est délicate, mais le résultat est assez intuitif.

C. QUELQUES METHODES DE REGULARISATION

Nous avons vu dans l'exemple du propagateur à une boucle qu'une étape cruciale pour éliminer les divergences consistait à introduire une théorie intermédiaire contenant un paramètre supplémentaire, le cut-off Λ. Les propriétés de cette théorie intermédiaire étaient très voisines de celles de la théorie continue. Formellement la seconde est la limite de la première quand Λ tend vers l'infini. Mais tant que Λ est fini, les grandes impulsions sont coupées, et les diagrammes de Feynman ont tous des valeurs finies. D'où le nom de théorie régularisée. Nous avons déjà remarqué dans le cas du propagateur que le choix de la théorie régularisée n'avait pas d'influence sur le résultat dans le continu exprimé en fonction des paramètres physiques, ce qui offre une certaine souplesse. Nous allons mentionner quatre régularisations différentes et dire leurs avantages et inconvénients respectifs.

1) Le réseau

C'est le candidat le plus naturel. La maille du réseau joue le rôle de Λ^{-1}. Par rapport aux autres régularisations, celle-ci à l'avantage de ne pas être perturbative, c'est-à-dire de pouvoir se formuler à un niveau plus fondamental que celui des règles de Feynman. Dans le cas qui nous concerne, elle a plusieurs inconvénients. Nous sommes partis de la théorie sur réseau, et nous sommes à la recherche d'une limite continue plus simple à analyser et contenant la physique essentielle. Revenir sur le réseau nous amènerait à tourner en rond mais aussi, si nous gardions le potentiel non polynômial, à des difficultés techniques énormes qui n'ont jamais été totalement résolues. Cependant, nous pourrions prendre sur le réseau non pas la théorie initiale, qui est compliquée, mais la discrétisation de la théorie continue. Ainsi les vertex ne proliféreraient pas, les dérivées deviendraient des différences finies, etc. Même dans ce cas les calculs analytiques sont assez pénibles, et nous n'en ferons pas dans la suite.

2) La méthode du temps propre

Elle consiste à remplacer le propagateur $\left(p^2+m_0^2\right)^{-1}$ par

$$\int_{1/\Lambda^2}^{\infty} \exp\left(-t\left(p^2+m_0^2\right)\mathrm{d}t\right) \ .$$

Tant que Λ est fini, le comportement à grand moment rend toutes les intégrales sur les moments de boucles finis, mais lorsque Λ tend vers l'infini on retrouve le propagateur initial. Dans cette méthode les règles de Feynman pour les vertex ne sont pas modifiées.

3) La régularisation zéta

Dans cette méthode, on n'introduit pas à proprement parler un cut-off. On modifie le propagateur $\left(p^2+m_0^2\right)^{-1}$, mais on ne touche pas aux vertex. Le nouveau propagateur est

$$\frac{\mu^{2s-2}}{\left(p^2+m_0^2\right)^s} \ ,$$

où μ est une masse arbitraire nécessaire pour préserver l'analyse dimensionnelle. On peut voir que pour s assez grand, les diagrammes sont convergents pour $m_0 \neq 0$, et dépendent de s de façon analytique. En tant que fonctions de s, ils ont des pôles à $s = 1$ pour les diagrammes divergents au sens du comptage de puissances usuel. Nous verrons un exemple de calcul dans la suite.

4) La régularisation dimensionnelle

Ici non plus, on n'introduit pas de cut-off à proprement parler. L'idée est un peu duale de celle de la régularisation zéta. Le degré de divergence d'un diagramme est $-2I + dL$ où, rappelons-le, I est le nombre de lignes internes et L le nombre de boucles. L'idée de la régularisation zéta était de changer 2 qui vient de $\left(p^2 + m_0^2\right)^{-1}$ en $2s$ pour que le degré de divergence superficiel devienne $-2sI + dL$, ce qui arrange tous les problèmes pour s grand. La régularisation dimensionnelle, elle, change d. Pour d assez petit, $-2I + dL$ est toujours négatif. Le problème est de définir les choses pour d arbitraire. Ensuite des propriétés d'analyticité en d permettent un traitement analogue à celui de la régularisation zéta. Contrairement aux apparences, ce procédé oblige aussi à introduire une nouvelle masse. Nous verrons plus loin pourquoi.

Les régularisations 3 et 4 sont assez peu physiques. Elles jouissent pourtant d'une grande popularité pour plusieurs raisons. D'abord elles préservent en général très bien les symétries de la théorie (ceci est particulièrement important pour des théories compliquées, comme les théories de jauge). Ensuite ce sont les plus commodes pour les calculs explicites. Enfin la régularisation dimensionnelle permet de manière systématique le calcul des propriétés critiques en dimension donnée en perturbant par rapport à la dimension au-delà de laquelle le champ moyen devient exact (développement en $4 - \varepsilon$).

Notons pour finir que, dans certains arguments, il est possible de raisonner en disant simplement qu'on a régularisé la théorie, sans préciser de quelle façon.

D. CALCULS EXPLICITES DE DIAGRAMMES REGULARISES

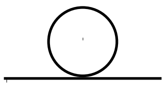
1) La théorie φ^4 à une boucle en dimension 4

L'idéal serait de pouvoir calculer, pour une régularisation donnée, tous les diagrammes explicitement. Ce n'est jamais, ou presque, le cas. L'essentiel est d'être capable d'extraire les divergences, qui disparaîtront après renormalisation, et les parties finies, qui contribueront aux fonctions.

a) *Le propagateur*

Nous avons déjà vu que la première correction pour Γ_2 était une constante, dont la valeur pour les régularisations 1 et 2 n'était pas très simple. Nous allons voir ce qu'il en est pour la régularisation zéta, puis pour la régularisation dimensionnelle.

En régularisation zéta (supposant $m_0 \neq 0$)



$$= -\frac{g_0}{2} \int \frac{\mathrm{d}^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\mu^{2s-2}}{(p^2 + m_0^2)^s}$$

Ceci converge pour Re $s > 2$. Intéressons-nous de façon plus générale à

$$\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d} \frac{1}{(p^2 + m_0^2)^s}$$

qui a priori n'est défini que pour d entier positif et Re $s > \frac{d}{2}$. Passant en coordonnées sphériques et faisant le changement de variable $p = m_0 k$, on obtient

$$m_0^{d-2s} \int \frac{\mathrm{d}^{d-1}\Omega \; k^{d-1} \mathrm{d}k}{(2\pi)^d (k^2 + 1)^s}$$

Commençons par calculer

$$\int \frac{\mathrm{d}^{d-1}\Omega}{(2\pi)^d}$$

par l'astuce suivante. Partant de

$$\int \mathrm{d}^d k \; \mathrm{e}^{-k^2} = \pi^{d/2}$$

et passant en coordonnées sphériques on obtient

$$\int \mathrm{d}^d k \; \mathrm{e}^{-k^2} = \int \mathrm{d}^{d-1}\Omega \; k^{d-1} \; \mathrm{d}k \; \mathrm{e}^{-k^2}$$

donc $\int \mathrm{d}^{d-1}\Omega$, surface de la sphère unité en dimension d, vaut

$$\pi^{d/2} \left(\int_0^\infty k^{d-1} \; \mathrm{d}k \; \mathrm{e}^{-k^2} \right)^{-1}$$

Posant $k^2 = u$, on obtient

$$\int \mathrm{d}^{d-1}\Omega = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$$

Notons que ceci est bien défini pour les dimensions non entières, et est analytique en d. Il en est de même de

$$I \equiv \int_0^\infty \frac{k^{d-1}\mathrm{d}k}{(k^2+1)^s}$$

tant que Re $s > d/2$. En fait, I est une fonction béta d'Euler. Nous donnerons la méthode pour calculer I plus tard, et nous montrerons que

$$I = \frac{1}{2}\frac{\Gamma(d/2)\Gamma(s-d/2)}{\Gamma(s)}$$

Finalement pour tout d entier non négatif

$$\int \frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{(p^2+m_0^2)^s} = \frac{m_0^{d-2s}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(s-d/2)}{\Gamma(s)}$$

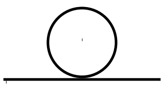
et le membre de droite donne un prolongement analytique du membre de gauche.

Cette formule est tout à fait fondamentale pour la régularisation dimensionnelle. Elle montre aussi que, quoique a priori

$$\int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^{2s}}$$

ne converge pour aucun d et s, le prolongement analytique lui donne une valeur nulle pour $d-2s>0$. Ceci est une des raisons pour lesquelles les régularisations 3 et 4 sont si commodes.

Finalement en régularisation zéta

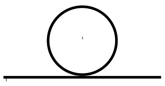


$$\begin{aligned} &= -\frac{g_0}{32\pi^2}m_0^2\left(\frac{m_0^2}{\mu^2}\right)^{1-s}\frac{1}{(s-1)(s-2)} \\ &= \frac{g_0 m_0^2}{32\pi^2}\left(\frac{1}{s-1}+\log\frac{\mu^2}{m_0^2}+1+O(s-1)\right) \end{aligned}$$

qui présente bien un pôle à $s=1$. Ce pôle est simple.

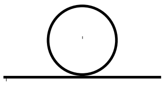
En régularisation dimensionnelle, il faut d'abord comprendre pourquoi il est nécessaire d'introduire une masse supplémentaire μ. Le point est que, lorsque $d=4$, la constante de couplage g_0 est sans dimension. En dimension $d \neq 4$, il n'en est plus de même, et il est naturel d'écrire la constante de couplage sous la forme $g_0\mu^{4-d}$ où g_0 est sans dimension.

Dans ce cadre on obtient



$$= -\frac{g_0}{2}\mu^{4-d}\int\frac{\mathrm{d}^d p}{(2\pi)^d}\frac{1}{p^2+m_0^2} = -\frac{g_0}{2}\mu^{4-d}\frac{m_0^{d-2}}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)$$

On pose $d = 4-\varepsilon$



$$\begin{aligned} &= -\frac{g_0 m_0^2}{32\pi^2}\left(\frac{\mu}{m_0}\right)^{\varepsilon}(4\pi)^{\varepsilon/2}\Gamma\left(-1+\frac{\varepsilon}{2}\right) \\ &= \frac{g_0 m_0^2}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon}+\log\frac{4\pi\mu^2}{m_0^2}+1-\gamma+O(\varepsilon)\right) \end{aligned}$$

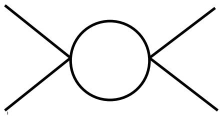
où $\gamma = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)$ apparaît parce que

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}-\gamma+O(s)$$

Dans les deux cas nous remarquons que la partie finie dépend de la masse arbitraire μ.

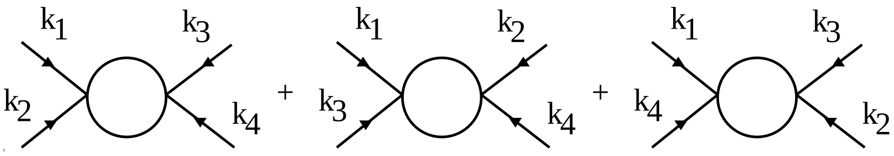
b) *La fonction à quatre points*

Il n'y a qu'un seul diagramme à une boucle contribuant à Γ_4. Il est de la forme

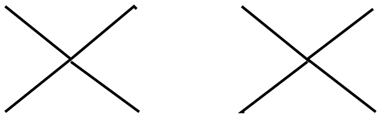


et il y a trois manières de répartir les impulsions externes, d'où

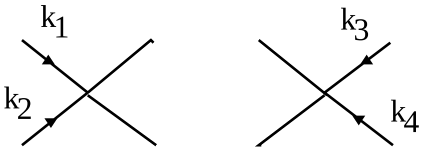
$-\Gamma_4^{(1\ \text{boucle})}(k_1, k_2, k_3, k_4) =$



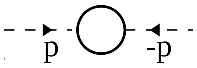
Concentrons-nous sur le premier diagramme et calculons d'abord le nombre de symétrie. Les deux lignes internes sont indiscernables, donc on attend un facteur $\frac{1}{2}$. En effet partant de



il y a un facteur $\frac{1}{2!}\frac{1}{4!^2}$. On choisit le vertex relié à (p_1, p_2) et le vertex relié à (p_3, p_4) d'où un facteur 2. Ensuite il y a 4 manières de choisir la patte reliée à p_1, puis 3 de choisir celle reliée à p_2. De même il y a 4×3 manières de relier des pattes aux impulsions p_3 et p_4. On obtient alors



Il reste alors deux façons de fermer la boucle. Finalement $\frac{1}{2!}\frac{1}{4!^2} 2 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 = \frac{1}{2}$ est bien le coefficient annoncé. Appelons p l'impulsion entrant dans la boucle ($p = k_1 + k_2$ pour le diagramme considéré). On veut calculer



Nous allons le faire en régularisation dimensionnelle. Le lecteur est invité à le faire avec la régularisation en temps propre et avec la régularisation zéta.

Il s'agit de donner un sens à

$$\int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{(q^2 + m_0^2)\left((p-q)^2 + m_0^2\right)}$$

qui a une divergence logarithmique à $d = 4$.

Pour l'instant l'intégrale est mal définie, mais une astuce va nous aider. On sait que pour $a > 0$ et Re $s > 0$ on a

$$\frac{1}{a^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \mathrm{d}t\ \mathrm{e}^{-ta} t^{s-1} \mathrm{d}t$$

On applique n fois cette identité pour obtenir

$$\frac{1}{a_1^{s_1}}\cdots\frac{1}{a_n^{s_n}}=\frac{1}{\Gamma(s_1)...\Gamma(s_n)}\int_0^\infty \mathrm{d}t_1...\mathrm{d}t_n\ \mathrm{e}^{-(t_1a_1+...+t_na_n)}t_1^{s_1-1}...t_n^{s_n-1}$$

Dans l'intégrale on insère

$$1=\int_0^\infty \mathrm{d}t\ \delta(t-t_1-...-t_n)$$

puis à t fixé on pose $t_i=tu_i$, $i=1,...,n$. On obtient pour l'intégrale l'expression

$$\int_0^\infty \mathrm{d}t\ \mathrm{d}u_1...\mathrm{d}u_n\ \delta(t(1-u_1-...-u_n))\,\mathrm{e}^{-t(u_1a_1+...+u_na_n)}t^{s_1+...+s_n}u_1^{s_1-1}...u_n^{s_n-1}$$

L'intégrale sur t est explicite et finalement

$$\frac{1}{a_1^{s_1}}\cdots\frac{1}{a_n^{s_n}}=\frac{\Gamma(s_1+...+s_n)}{\Gamma(s_1)...\Gamma(s_n)}\int_0^\infty \mathrm{d}u_1...\mathrm{d}u_n\ \delta(u_1+...+u_n-1)\,\frac{u_1^{s_1-1}...u_n^{s_n-1}}{(u_1a_1+...+u_na_n)^{s_1+...+s_n}}$$

(Remarquons incidemment que cette formule permet de calculer $\int_0^\infty \frac{k^{d-1}\mathrm{d}k}{(k^2+1)^s}$. Il suffit de poser $u=\frac{1}{k^2+1}$ pour obtenir une intégrale du type ci-dessus pour $n=2$, donnant le résultat annoncé ci-avant). Dans le cas qui nous intéresse maintenant, on pose $a_1=q^2+m_0^2$ et $a_2=(p-q)^2+m_0^2$, et on prend $s_1=s_2=1$. On obtient

$$\frac{1}{(q^2+m_0^2)((p-q)^2+m_0^2)}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{\left(u(q^2+m_0^2)+(1-u)((p-q)^2+m_0^2)\right)^2}$$

Le dénominateur sous le signe somme vaut

$$\left((q-(1-u)p)^2+u(1-u)p^2+m_0^2\right)^2$$

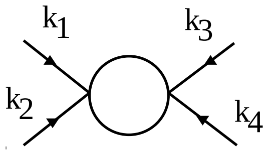
Nous aurons gagné si nous savons donner un sens à

$$\int\frac{\mathrm{d}^dq}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left((q-(1-u)p)^2+u(1-u)p^2+m_0^2\right)^2}$$

Pour cela, nous allons supposer que la mesure d'intégration d^dq est invariante par translation, comme c'est le cas pour d entier. Changeant q en $q-(1-u)p$ nous obtenons une intégrale connue, dont la valeur est

$$\frac{\left(u(1-u)p^2+m_0^2\right)^{\frac{d-4}{2}}}{(4\pi)^{d/2}}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)$$

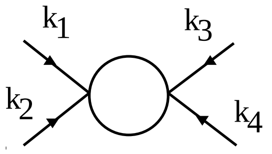
Finalement



$$=\frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{32\pi^2}\Gamma\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)(4\pi)^{\varepsilon/2}\int_0^1\left(u(1-u)p^2+m_0^2\right)^{-\varepsilon/2}\mathrm{d}u$$

où $p=p_1+p_2$.

On peut maintenant extraire les singularités en ε. On obtient



$$= \frac{g_0^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma - \int_0^1 \log\left(\frac{u(1-u)p^2 + m_0^2}{4\pi\mu^2}\right) \mathrm{d}u + O(\varepsilon)\right)$$

Il y a à nouveau un pôle simple, et la partie finie dépend de la masse arbitraire μ. En fait l'intégrale sur u est élémentaire et vaut

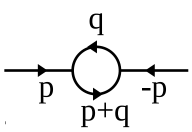
$$-2 + \log\frac{m_0^2}{4\pi\mu^2} + \sqrt{1 + \frac{4m_0^2}{p^2}}\,\log\frac{\sqrt{1+\frac{4m_0^2}{p^2}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m_0^2}{p^2}}-1}$$

2) La théorie φ^3 à une boucle en dimension 6

Nous avons vu que pour φ^3 à $d = 6$ le comptage de puissances donnait comme superficiellement divergentes les fonctions à au plus 3 points. La renormalisation des fonctions à 0 et 1 point n'est pas intéressante pour notre propos car ce sont des constantes. On s'occupe donc des fonctions à 2 et 3 points. On utilise la régularisation dimensionnelle. A $d = 6$ la constante de couplage pour φ^3 est sans dimension. En $d = 6 - \varepsilon$ on écrit la constante de couplage $g_0\mu^{\varepsilon/2}$ où g_0 est sans dimension.

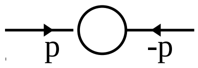
a) *Le propagateur*

Pour cette théorie, la correction à une boucle n'est pas une constante.



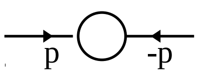
$$= \frac{g_0^2\mu^\varepsilon}{2}\int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{(q^2+m_0^2)\left((p-q)^2+m_0^2\right)}$$

(Le lecteur est invité à se convaincre que le facteur de symétrie est bien $\frac{1}{2}$). En fait nous avons déjà calculé cette intégrale, car formellement elle est identique à celle contribuant à la fonction à 4 points de φ^4 à $d = 4$. On obtient



$$= \frac{g_0^2\mu^\varepsilon}{2}\frac{\Gamma(2-d/2)}{(4\pi)^{d/2}}\int_0^1 \left(u(1-u)p^2 + m_0^2\right)^{(d-4)/2} \mathrm{d}u$$

On peut alors extraire les singularités en ε. Il vient

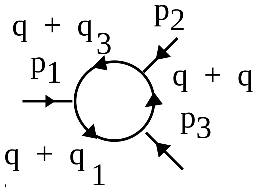


$$= \frac{g_0^2}{64\pi^3}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{p^2}{6} + m_0^2\right) + \int_0^1 \mathrm{d}u\,\left(u(1-u)p^2 + m_0^2\right)\log\left(\frac{u(1-u)p^2+m_0^2}{4\pi\mu^2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{(\gamma-1)}{2}\left(\frac{p^2}{6} + m_0^2\right) + O(\varepsilon)\right)$$

Le point important est que la partie divergente n'est pas une constante mais contient un terme en p^2. C'est à cause de telles contributions que Z_ϕ est non trivial. Dans la théorie φ^4 à $d = 4$ de tels termes n'apparaissent qu'à l'ordre de deux boucles comme nous le verrons plus loin.

b) *La fonction de vertex*

Il n'y a qu'un diagramme à une boucle contribuant à Γ_3, et il n'y a qu'une manière de répartir les impulsions externes. Le facteur de symétrie est 1.



$$= -g_0^3 \mu^{3\varepsilon/2} \int \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left((q+q_1)^2 + m_0^2\right)\left((q+q_2)^2 + m_0^2\right)\left((q+q_3)^2 + m_0^2\right)}$$

où $q_2 = q_1 + p_3$, $q_3 = q_2 + p_1$ mais $q_1 + q_2 + q_3$ est arbitraire.

Pour donner un sens à cette intégrale on utilise le truc habituel. L'intégrand se réécrit

$$2 \int \frac{du_1 du_2 du_3 \ \delta(u_1 + u_2 + u_3 - 1)}{\left(u_1\left((q+q_1)^2 + m_0^2\right) + u_2\left((q+q_2)^2 + m_0^2\right) + u_3\left((q+q_3)^2 + m_0^2\right)\right)^3}$$

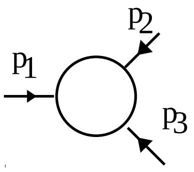
Le dénominateur vaut

$$\left(q^2 + m_0^2 + 2q\left(u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3\right) + u_1 q_1^2 + u_2 q_2^2 + u_3 q_3^2\right)^3$$

c'est-à-dire

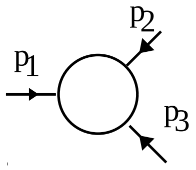
$$\left((q + u_1 q_1 + u_2 q_2 + u_3 q_3)^2 + m_0^2 + u_1 u_2 p_3^2 + u_1 u_3 p_2^2 + u_2 u_3 p_1^2\right)^3$$

L'intégrale sur q se calcule exactement et on obtient



$$= -g_0^3 \mu^{3\varepsilon/2} \frac{\Gamma(3 - d/2)}{(4\pi)^{d/2}} \int du_1 du_2 du_3 \delta(1 - u_1 - u_2 - u_3)$$
$$\times \left(m_0^2 + u_1 u_2 p_3^2 + u_2 u_3 p_1^2 + u_1 u_3 p_2^2\right)^{(d-6)/2}$$

On peut alors extraire les singularités en ε. Le résultat est

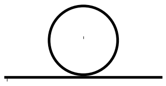


$$= -\frac{g_0^3 \mu^{\varepsilon/2}}{64\pi^3} \left(\frac{2}{\varepsilon} - \frac{\gamma}{2} - \int du_1 du_2 du_3 \delta(1 - u_1 - u_2 - u_3)\right.$$
$$\left.\times \log\left(\frac{m_0^2 + u_1 u_2 p_3^2 + u_2 u_3 p_1^2 + u_1 u_3 p_2^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(\varepsilon)\right)$$

Pour φ^4 à $d = 4$, comme pour φ^3 à $d = 6$, les divergences des diagrammes à une boucle sont des pôles simples en ε, le résidu au pôle ne dépend pas de l'échelle arbitraire μ, mais la partie finie en dépend.

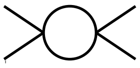
3) La théorie φ^4 de masse nulle à deux boucles en dimension 4

Avant de passer à deux boucles, notons que si $m_0^2 = 0$



$$= 0$$

et

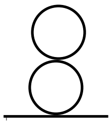
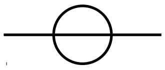


$$= \frac{g_0^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \gamma + 2 - \log\frac{p^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon)\right)$$

où p est l'impulsion totale entrante.

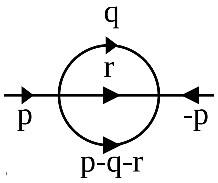
a) *Le propagateur*

Il y a deux diagrammes 1PI à deux boucles

 et 

Le premier est nul en régularisation dimensionnelle. Le lecteur est invité à vérifier lui-même ce résultat très simple.

Le second a un facteur de symétrie $\frac{1}{6}$ car les trois lignes internes sont équivalentes. Donc



$$= \frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{6}\int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{\mathrm{d}^d r}{(2\pi)^d}\frac{1}{q^2 r^2 (p-q-r)^2}$$

Comme préliminaire nous allons calculer

$$I(k) = \int \frac{\mathrm{d}^d \ell}{(2\pi)^d}\frac{1}{\ell^{2\alpha}(k-\ell)^{2\beta}} \qquad \alpha, \beta \ \text{ arbitraires}$$

L'intégrand vaut

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^1 \mathrm{d}u \ \frac{u^{\beta-1}(1-u)^{\alpha-1}}{\left((1-u)\ell^2 + u(k-\ell)^2\right)^{\alpha+\beta}}$$

et l'intégrale sur ℓ est calculable.

$$I(k) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{\left(k^2\right)^{d/2-\alpha-\beta}}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(\alpha+\beta-d/2)}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^1 \mathrm{d}u \ u^{d/2-\alpha-1}(1-u)^{d/2-\beta-1}$$

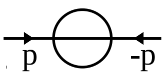
L'intégrale sur u vaut

$$\frac{\Gamma(d/2-\alpha)\Gamma(d/2-\beta)}{\Gamma(d-\alpha-\beta)}$$

Finalement

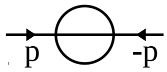
$$I(k) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta-d/2)\Gamma(d/2-\alpha)\Gamma(d/2-\beta)}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d-\alpha-\beta)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\frac{1}{\left(k^2\right)^{\alpha+\beta-d/2}}$$

On en déduit que l'intégrale double que nous cherchons se calcule en appliquant deux fois cette formule. On intègre d'abord sur q avec r fixé, $\alpha = \beta = 1$ et $p - r$ joue le rôle de k.



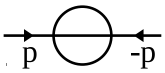
$$= \frac{g_0^2\mu^{2\varepsilon}}{6}\int \frac{\mathrm{d}^d r}{(2\pi)^d}\frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2-1)^2}{\Gamma(d-2)}\frac{1}{r^2(p-r)^{2(2-d/2)}}$$

Maintenant on intègre sur r, $\alpha = 1$, $\beta = 2 - d/2$.



$$= \frac{g_0^2 p^2}{6(4\pi)^4} \left(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon/2)^3\Gamma(-1+\varepsilon)}{\Gamma(3-3\varepsilon/2)}$$

d'où le développement

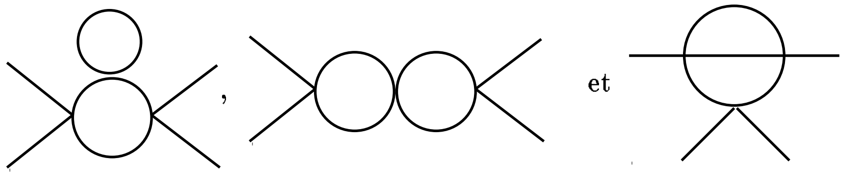


$$= \frac{g_0^2 p^2}{12(4\pi)^4} \left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \frac{13}{4} + \log\frac{p^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon)\right)$$

Ceci illustre l'utilité de Z_ϕ pour φ^4 à $d = 4$. Le pôle contient un facteur p^2.

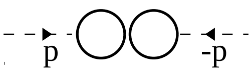
b) *La fonction de vertex*

Il y trois diagrammes 1PI à deux boucles



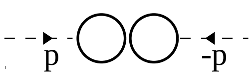
A nouveau le premier est nul en régularisation dimensionnelle (toujours à cause du même sous-diagramme).

Le second a un facteur de symétrie 1/4 et on peut distribuer les impulsions externes de trois façons différentes. Son évaluation est élémentaire car les deux boucles sont indépendantes et égales. On obtient



$$= -\frac{g_0^3\mu^\varepsilon}{4(4\pi)^4} \left(\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon} \frac{\Gamma(1-\varepsilon/2)^4\Gamma(\varepsilon/2)^2}{\Gamma(2-\varepsilon)^2}$$

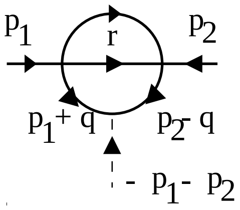
Pour ce diagramme nous ne gardons que les termes singuliers. Le lecteur courageux peut calculer la partie finie.



$$= -\frac{g_0^3\mu^\varepsilon}{4(4\pi)^4} \left(\frac{4}{\varepsilon^2} - \frac{4}{\varepsilon}\left(\gamma - 2 + \log\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right) + O(1)\right)$$

Cette fois-ci il y a un pôle double, et le résidu au pôle simple dépend de p et de la masse arbitraire μ.

Le troisième est un peu plus compliqué. Il a un facteur de symétrie 1/2 et on peut distribuer les impulsions externes de six façons différentes. Calculons par exemple

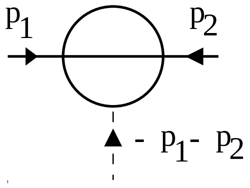


$$= -\frac{g_0^3\mu^{3\varepsilon}}{2} \int \frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d} \frac{\mathrm{d}^d r}{(2\pi)^d} \frac{1}{r^2(q+r)^2\,(p_1+q)^2\,(p_2-q)^2}$$

Bien sûr on commence par l'intégrale sur r, dont on sait qu'elle vaut

$$\frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2-1)^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d-2)}\frac{1}{\left(q^2\right)^{2-d/2}}$$

On a donc



$$= -\frac{g_0^3\mu^{3\varepsilon}}{2}\frac{\Gamma(2-d/2)\Gamma(d/2-1)^2}{(4\pi)^{d/2}\Gamma(d-2)}\int\frac{\mathrm{d}^d q}{(2\pi)^d}\frac{1}{\left(q^2\right)^{2-d/2}(p_1+q)^2(p_2-q)^2}$$

Pour calculer la dernière intégrale on introduit des paramètres auxiliaires de la façon usuelle. L'intégrale vaut

$$\int_\Delta \mathrm{d}u\mathrm{d}v\frac{\Gamma(4-d)}{\Gamma(2-d/2)}\frac{\left[up_1^2+vp_2^2-(up_1-vp_2)^2\right]^{d-4}}{(4\pi)^{d/2}}(1-u-v)^{1-d/2}$$

où Δ est le domaine $0\le u$, $0\le v$, $u+v\le 1$.

Cherchons les singularités de

$$I=\int_\Delta \mathrm{d}u\ \mathrm{d}v(1-u-v)^{1-d/2}\left(\frac{up_1^2+vp_2^2-(up_1-vp_2)^2}{4\pi\mu^2}\right)^{d-4}$$

à $\varepsilon=0$.

Pour cela on pose $u+v=x$, $u=tx$, dont le jacobien vaut x et on obtient

$$I=\int_0^1 x\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y(1-x)^{1-d/2}x^{d-4}\left[\frac{y(1-yx)p_1^2+(1-y)(1-(1-y)x)p_2^2+2y(1-y)p_1p_2}{4\pi\mu^2}\right]^{d-4}$$

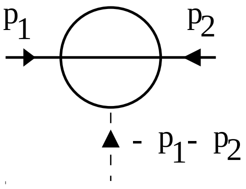
Les singularités viennent de la région $x=1$

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y(1-x)^{-1+\varepsilon/2}x^{1-\varepsilon}\left[\frac{y(1-y)s+(1-x)\left(y^2p_1^2+(1-y)^2p_2^2\right)}{4\pi\mu^2}\right]^{-\varepsilon}$$

Il n'est pas trop difficile de se convaincre que

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y(1-x)^{-1+\varepsilon/2}x^{1-\varepsilon}\left(\frac{y(1-y)s}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon}+O(\varepsilon)$$

On remarque que la partie singulière de



ne dépend que de $(p_1 + p_2)^2 = s$.

Dans la suite nous n'aurons besoin que du pôle simple en $\varepsilon = 0$, et même seulement de la partie dépendant des impulsions. Cette partie singulière est simplement

$$\frac{g_0^3 \mu^\varepsilon}{(4\pi)^4 \varepsilon} \log \frac{s}{4\pi\mu^2}$$

Ces exemples montrent qu'en régularisation dimensionnelle les diagrammes à masse nulle sont particulièrement simples.

E. INTRODUCTION A LA RENORMALISATION DE φ^4 EN DIMENSION 4

Nous allons maintenant utiliser les calculs de diagrammes précédents pour comprendre comment obtenir ordre par ordre une théorie finie.

Nous avons vu à la fin du III.A quelle devait être la forme de l'action régularisée sur le réseau amenant à des fonctions de corrélation finies. La transposition au cas de la régularisation dimensionnelle est très simple.

On obtient

$$S = \int \mathrm{d}^{4-\varepsilon}x \left(\frac{Z_\phi}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{Z_\phi Z_2}{2} m^2\phi^2 + \frac{Z_\phi^2 Z_4}{4!} g\mu^\varepsilon \phi^4 \right)$$

avec un changement de notation (m^2 remplace g_2 et g remplace g_4). Les fonctions Z_ϕ, Z_2 et Z_4 dépendent de m^2, g, μ, ε ; ce sont des fonctions sans dimension. Elles ont un développement en puissances de g et valent 1 à l'ordre 0 en g. Elles sont fixées ordre par ordre en g pour éliminer tous les pôles en ε des fonctions de corrélation et pour faire que m^2, g et ϕ vérifient une certaine propriété de normalisation fixant leur interprétation physique. En fait on peut faire intervenir μ dans ces propriétés de normalisation. Dans ce cas Z_ϕ, Z_2, Z_4 dépendent de μ aussi à ce titre. Nous avons donné des arguments intuitifs en faveur de cette procédure, mais nous ne nous lancerons pas dans la preuve de la renormalisabilité de φ^4. Nous allons simplement illustrer la stratégie sur quelques exemples.

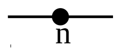
Nous réécrivons S sous la forme

$$\begin{aligned} S &= \int \mathrm{d}^{4-\varepsilon}x \left(\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{g\mu^\varepsilon}{4!}\phi^4 \right) + \delta S \equiv S_0 + \delta S \\ \delta S &= \int \mathrm{d}^{4-\varepsilon}x \left(\frac{Z_\phi - 1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{Z_\phi Z_2 - 1}{2} m^2\phi^2 + \frac{Z_\phi^2 Z_4 - 1}{4!} g\mu^\varepsilon\phi^4 \right) \end{aligned}$$

Il faut imaginer que les termes dans δS, appelés contre-termes, sont développés en puissances de g. Les contre-termes contribuent à de nouveaux vertex. Par exemple posant

$$Z_\phi - 1 = \sum_1^\infty a_n g^n \ ,$$

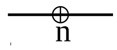
on a pour chaque n un vertex à deux pattes noté



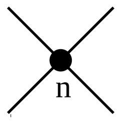
qui représente $-a_n g^n p^2$ où p est l'impulsion entrante. De même posant

$$Z_\phi Z_2 - 1 = \sum_1^\infty b_n g^n \quad \text{et} \quad Z_\phi^2 Z_n - 1 = \sum_1^\infty c_n g^n$$

on a des vertex



qui représentent $-b_n g^n m^2$ et des vertex



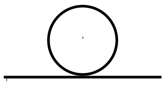
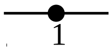
qui représentent $-c_n g^{n+1}\mu^{\varepsilon}$.

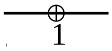
Nous allons maintenant renormaliser les fonctions 1PI primitivement divergentes Γ_2 et Γ_4 au premier ordre non trivial en g.

1) Renormalisation de φ^4 à une boucle

En théorie des perturbations au premier ordre en g on a

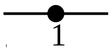
$$\Gamma_2(p) = p^2 + m^2 - \sum(p)$$

$= p^2 + m^2 -$  $-$ 

$-$ 

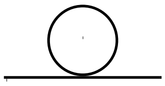
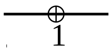
$$= p^2 + m^2 - \frac{gm^2}{32\pi^2}\left(\frac{2}{\varepsilon} - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} + 1 - \gamma + O(\varepsilon)\right) + b_1 g m^2 + a_1 g p^2$$

Il est clair qu'on peut choisir $b_1(m,\mu,\varepsilon)$ et $a_1(m,\mu,\varepsilon)$ de telle sorte que Γ_2 admette une limite finie quand ε tend vers 0. Il suffit que b_1 soit la somme d'une fonction régulière à $\varepsilon = 0$ et du pôle $\left(16\pi^2\varepsilon\right)^{-1}$, et que a_1 soit régulière à $\varepsilon = 0$. Ceci laisse un grand arbitraire qu'il faut fixer en donnant le sens physique de ϕ et m^2. Ceci porte le nom de prescription de renormalisation. Par exemple, il est naturel de demander qu'à p^2 petit le propagateur ressemble le plus possible au propagateur libre. Pour cela, il suffit de prendre



$= 0$

c'est-à-dire $a_1 = 0$ et

 $+$ 

$= 0$

c'est-à-dire

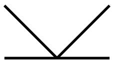
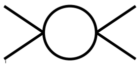
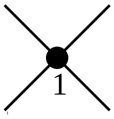
$$b_1 = \frac{\Gamma(-1+\varepsilon/2)}{32\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2}.$$

Alors au premier ordre en g

$$\Gamma_2(p) = p^2 + m^2$$

Nous verrons plus loin que d'autres prescriptions de renormalisation sont possibles. Elles sont parfois inévitables et souvent plus commodes.

Au second ordre en g la fonction à 4 points vaut

$\Gamma_4(p_1, p_2, p_3, p_4) =$  $+$  (3 diagrammes) $+$ 

Cette fois l'expression est un peu plus compliquée, mais nous avons calculé tous les diagrammes nécessaires. On pose $(p_1+p_2)^2 = s$, $(p_1+p_3)^2 = t$, $(p_1+p_4)^2 = u$ et

$$I(s) = 2 - \log\frac{m^2}{4\pi\mu^2} - \sqrt{1+\frac{4m^2}{s}}\,\log\frac{\sqrt{1+\frac{4m^2}{s}}+1}{\sqrt{1+\frac{4m^2}{s}}-1} - \gamma$$

On obtient

$$\Gamma_4\left(p_1,p_2,p_3,p_4\right) = g\mu^\varepsilon - \frac{g^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left(\frac{6}{\varepsilon} + I(s) + I(t) + I(u) + O(\varepsilon)\right) + g^2\mu^\varepsilon c_1(m,\mu,\epsilon)$$

Pour que Γ_4 admette une limite finie quand ε tend vers 0, il suffit que c_1 soit la somme d'une fonction régulière à $\varepsilon = 0$ et du pôle $3\left(16\pi^2\varepsilon\right)^{-1}$. A nouveau il faut fixer l'arbitraire par une prescription de renormalisation. Une manière de faire est d'imposer la valeur de Γ_4 pour une valeur particulière des arguments. Par exemple prenons $\Gamma_4(0,0,0,0) = g\mu^\varepsilon$.

Ceci fixe

$$c_1 = \frac{3\Gamma(\varepsilon/2)}{32\pi^2}\left(\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)^{-\varepsilon/2}$$

A la limite $\varepsilon = 0$ on obtient, au second ordre en g

$$\Gamma_4\left(p_1,p_2,p_3,p_4\right) = g - \frac{g^2}{32\pi^2}\left(I(s) + I(t) + I(u) + 3\log\frac{m^2}{4\pi\mu^2}\right)$$

En fait cette expression ne dépend plus de μ, mais il y a un léger inconvénient. Notre prescription de renormalisation n'est pas valable si $m^2 = 0$. En effet dans ce cas

$$\begin{aligned}\Gamma_4\left(p_1,p_2,p_3,p_4\right) &= g\,\mu^\varepsilon - \frac{g^2\mu^\varepsilon}{32\pi^2}\left(\frac{6}{\varepsilon} - 3\gamma + 6 - \log\frac{s}{4\pi\mu^2} - \log\frac{t}{4\pi\mu^2} - \log\frac{u}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon)\right)\\ &\quad + g^2\mu^\varepsilon c_1(\varepsilon)\end{aligned}$$

Notons que c_1 ne dépend plus que de ε car c_1 est sans dimension, donc à $m^2 = 0$ il ne peut pas dépendre de μ. Le problème est maintenant que Γ_4 diverge à moments entrants nuls, pour des raisons indépendantes de la régularisation.

Ceci signifie qu'à moments faibles il y a de grandes corrélations. Pour fixer le sens de g lorsque $m^2 = 0$, il faut se placer à une échelle de masse finie en impulsion. A une boucle Γ_4 ne dépend que de s, t, u, mais en général Γ_4 dépend de tous les scalaires p_ip_j. On peut normaliser Γ_4 en le fixant à $g\mu^\varepsilon$ pour certaines valeurs de ces invariants. Nous pourrions pour cela introduire une nouvelle masse, mais nous disposons déjà de μ. Il n'y a pas de raison de multiplier les constantes arbitraires. Donc nous allons utiliser μ comme échelle des moments. On peut préserver la symétrie entre les impulsions entrantes en normalisant Γ_4 pour $p_i^2 = \mu^2$, $p_ip_j = -\frac{\mu^2}{3}$, $i \neq j$. On vérifie que ce choix assure bien $p_1+p_2+p_3+p_4 = 0$. Cette condition de normalisation (dite au point symétrique μ) amène à prendre

$$c_1 = \frac{3\Gamma(\varepsilon/2)\Gamma(1-\varepsilon/2)^2(3\pi)^{\varepsilon/2}}{32\pi^2\Gamma(2-\varepsilon)}$$

A la limite $\varepsilon = 0$ on obtient à l'ordre 2 en g

$$\Gamma_4\left(p_1,p_2,p_3,p_4\right) = g + \frac{g^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{3s}{4\mu^2} + \log\frac{3t}{4\mu^2} + \log\frac{3u}{4\mu^2}\right)$$

Cette expression semble dépendre de la masse totalement arbitraire μ, mais c'est parce que μ nous a servi à fixer le sens physique de g. Comme les conditions de renormalisation fixent Γ_4 on peut raisonner de la façon suivante. Appelons g' la valeur de Γ_4 au point symétrique correspondant à μ'. On a donc

$$g' = g + \frac{3g^2}{16\pi^2}\log\frac{\mu'}{\mu} + O\left(g^3\right)$$

On peut bien sûr réexprimer Γ_4 en fonction de g' au lieu de g.

Faisant explicitement le changement on obtient

$$\Gamma_4\left(p_1,...,p_4\right) = g' + \frac{g'^2}{32\pi^2}\left(\log\frac{3s}{4\mu'^2} + \log\frac{3t}{4\mu'^2} + \log\frac{3u}{4\mu'^2}\right) + O\left(g^3\right)$$

Mais ceci est aussi la substitution pure et simple de g' pour g et μ' pour μ dans l'expression initiale de Γ_4. La raison est la suivante : la fonction Γ_4 est fixée en donnant les conditions de renormalisation. Donc la fonction obtenue en fixant Γ_4 à valoir g' au point symétrique μ' doit coïncider avec la fonction Γ_4 obtenue en fixant Γ_4 à valoir g au point symétrique μ réexprimée en fonction de sa valeur au point symétrique μ', valeur notée g'. Cette notion est à la base de l'idée de groupe de renormalisation que nous verrons plus loin.

Notons que même dans le cas où $m^2 \neq 0$ il est possible de fixer la normalisation de Γ_4 (donc le contre-terme c_1) en utilisant le point symétrique μ. Le lecteur est invité à calculer Γ_4 à $\varepsilon = 0$ dans ce cas.

2) Prescriptions de renormalisation

Nous venons de voir que la condition d'élimination des pôles ne fixait pas les contre-termes complètement, et que la fixation complète de ceux-ci et des fonctions de corrélation passait par la prescription de l'interprétation physique des "constantes de couplage" (i.e. pour φ^4 la normalisation de φ, m^2 et g). Passons en revue quelques prescriptions parmi les plus courantes.

a) Dans le cas où m^2 est non nulle, on peut demander que pour les impulsions faibles la théorie ressemble le plus possible à ce que donne l'ordre des arbres. On demande donc que

$$\Gamma_2(p) = m^2 + p^2 + o\left(p^2\right)$$

c'est-à-dire

$$\Gamma_2(0) = m^2 \qquad\qquad \frac{\mathrm{d}\Gamma_2}{\mathrm{d}p^2}(0) = 1$$

et que

$$\Gamma_4(0) = g$$

On voit que ceci fixe entièrement Z_ϕ, Z_2 et Z_4 (ou tout au moins leur pôles et parties finies si on n'impose les conditions que pour $\varepsilon = 0$).

Le sens physique de cette méthode est assez clair. On pourrait fixer Γ_2 de façon encore plus physique en ayant en vue la théorie des champs et en demandant que Γ_2 ait un pôle de résidu unité à $p^2 = -m^2$, c'est-à-dire en imposant

$$\Gamma_2(p) = \left(p^2 + m^2\right) K\left(p^2\right)$$

où $K\left(p^2\right)$ est analytique au voisinage de $p^2 = -m^2$ et vaut 1 en ce point.

Alors $1/m$ représente la vraie longueur de corrélation physique. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas très pratique.

b) Nous avons vu que la première prescription de renormalisation ne pouvait pas être utilisée si $m^2 = 0$. On est alors obligé de fixer les normalisations pour des impulsions entrantes non nulles. Mais on peut faire ceci aussi si $m^2 \neq 0$.

Par exemple on peut demander

$$\Gamma_2 = m^2 \ , \qquad \frac{\mathrm{d}\Gamma_2}{\mathrm{d}p^2} = 1 \quad \text{à} \quad p^2 = \mu^2$$

et

$$\Gamma_4 = g \qquad \text{au point symétrique } \mu.$$

Bien sûr dans ce cas Γ_1 et Γ_4 se mettent à dépendre de μ, mais sont invariants quand on change de façon cohérente m, μ et g. En fait rien n'oblige à choisir le même μ partout. On peut panacher en introduisant plusieurs masses, ou en normalisant une partie de Γ_2 à $p^2 = 0$ et l'autre à $p^2 = \mu^2$. La seule condition est que la normalisation ne se fasse pas en un point où la fonction considérée est singulière.

c) La prescription dite "indépendante de la masse" est aussi très utilisée. On renonce à dire quel est le sens physique précis des couplages (comme valeur des fonctions de corrélation à certains points), mais il y a des avantages. Cette prescription est très simple à énoncer : les contre-termes sont sans partie finie, c'est-à-dire qu'ils contiennent les pôles nécessaires pour que les fonctions de corrélations aient une limite à $\varepsilon = 0$, mais rien de plus. On peut montrer que les contre-termes sont alors indépendants de m, donc aussi de μ. C'est ce qui rend cette prescription si maniable. La raison intuitive est que les contre-termes sont là pour éliminer les divergences à grand moment, c'est-à-dire là où les masses sont négligeables. Cette prescription est aussi appelée la soustraction minimale, pour des raisons évidentes.

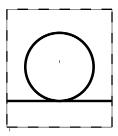
3) Renormalisation de φ^4 de masse nulle à deux boucles

Une des propriétés de la régularisation dimensionnelle, qui contribue à la rendre si pratique, est que les contre-termes de masse s'annulent avec la masse. Autrement dit on peut faire $m^2 = 0$ et partir de

$$S = \int \mathrm{d}^{4-\varepsilon}x \frac{Z_\phi}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{Z_\phi^2 Z_n}{4!} g \ \mu^\varepsilon \phi^4$$

et éliminer toutes les divergences en fixant Z_ϕ et Z_4.

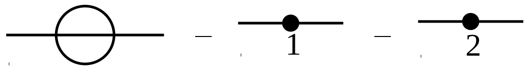
On peut vérifier explicitement sur les diagrammes que nous avons calculés que les divergences de Γ_2 ne contiennent que des termes en p^2 à $m^2 = 0$. Nous allons maintenant renormaliser la théorie de masse nulle à deux boucles. Nous allons en profiter pour comparer les prescriptions de renormalisation. Nous avons déjà vu qu'à $m^2 = 0$ les diagrammes contenant



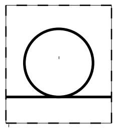
comme sous diagrammes ne contribuaient pas.

Pour Γ_2 le travail est relativement simple. A l'ordre 2 en g

$$\Gamma_2(p) = p^2 -$$

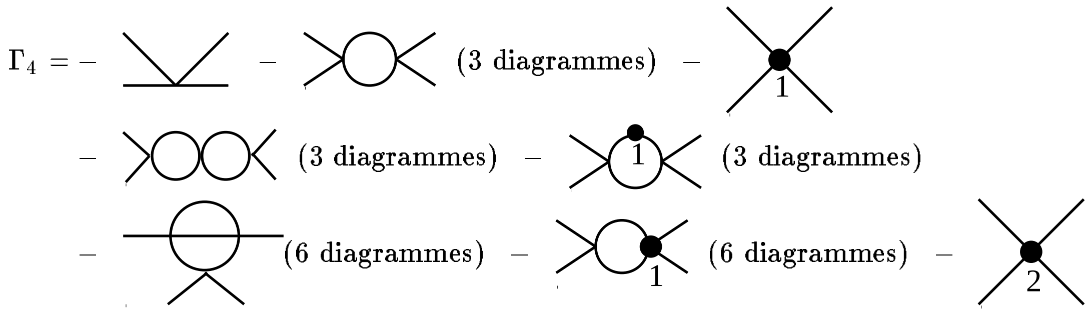


car tous les autres diagrammes contiennent



comme sous-diagramme. Nous n'avons pas inclus les contre-termes de masse car ils sont inutiles (nous allons le voir à deux boucles mais c'est général) dans la théorie de masse nulle.

Pour Γ_4 les diagrammes commencent à proliférer.



Nous n'allons pas faire le calcul complet mais simplement identifier les types de singularités qui apparaissent dans ces expressions.

Ceci va nous donner l'occasion de vérifier dans ce cas particulier la manière dont les contre-termes à un certain ordre contribuent (de façon irremplaçable) à éliminer des divergences à un ordre supérieur.

Commençons par le propagateur

$$\Gamma_2 = p^2 - \frac{g^2 p^2}{12(4\pi)^4}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \frac{13}{4} + \log\frac{p^2}{4\pi\mu^2} + O(\varepsilon)\right) + a_1 g p^2 + a_2 g^2 p^2$$

La partie finie de Γ_2 contient un terme en $p^2 \log p^2$ qui ne permet pas de fixer les contre-termes par le développement de Γ_2 au voisinage de $p^2 = 0$. Fixer

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_2}{\mathrm{d}p^2} = 1 \quad \text{à} \quad p^2 = \mu^2$$

donne

$$a_1 = 0\ , \qquad a_2 = \frac{1}{12(4\pi)^4}\left(-\frac{1}{\varepsilon} + \gamma - \frac{9}{4} - \log 4\pi + O(\varepsilon)\right)$$

et à $\varepsilon = 0$

$$\Gamma_2 = p^2 - \frac{g^2 p^2}{12(4\pi)^4}\left(\log\frac{p^2}{\mu^2} - 1\right) + O\left(g^3\right)$$

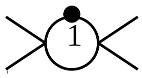
Faire la soustraction minimale donne

$$a_1 = 0 \quad , \qquad a_2 = \frac{1}{12(4\pi)^4\varepsilon}$$

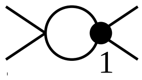
et à $\varepsilon = 0$

$$\Gamma_2 = p^2 - \frac{g^2 p^2}{12(4\pi)^4}\left(\gamma - \frac{13}{4} + \log\frac{p^2}{4\pi\mu^2}\right) + O\left(g^3\right)$$

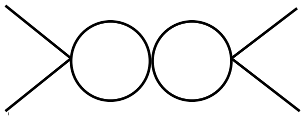
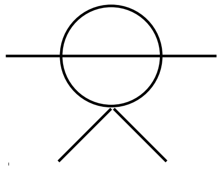
Dans les deux cas $a_1 = 0$ et nous pouvons nous dispenser des trois diagrammes du type



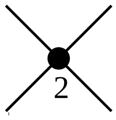
dans l'expression de Γ_4. Pour s'assurer que la renormalisation est possible, il faut montrer que les divergences contenant les impulsions de



compensent automatiquement celles venant de

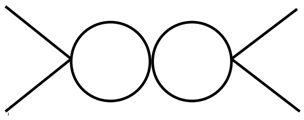

et


En effet



est indépendant des impulsions.

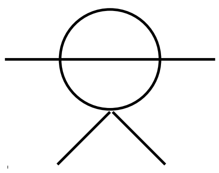
On vérifie ces compensations séparément pour les canaux s, t et u. Dans le canal s



donne

$$-\frac{g^3\mu^\varepsilon}{(4\pi)^4\varepsilon}\log\frac{s}{4\pi\mu^2}$$

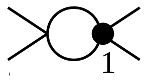
Deux diagrammes de type



contribuent au canal s pour donner

$$2\frac{g^3\mu^\varepsilon}{(4\pi)^4\varepsilon}\log\frac{s}{4\pi\mu^2}$$

Enfin deux diagrammes du type



contribuent au canal s pour donner

$$-2\frac{g^3\mu^\varepsilon c_1}{2(4\pi)^2}\log\frac{s}{4\pi\mu^2}$$

D'autre part on sait que la partie polaire de c_1 est

$$\frac{3}{(4\pi)^2\varepsilon}\ .$$

Donc la compensation annoncée se produit bien.

Ceci achève de montrer la renormalisabilité de φ^4 de masse nulle à deux boucles pour Γ_2 et Γ_4. La preuve générale de la renormalisabilité utilise des méthodes plus puissantes qui s'appuient sur les équations du groupe de renormalisation que nous allons étudier maintenant.

Le lecteur très courageux peut calculer Γ_4 à deux boucles à $\varepsilon = 0$ pour les deux prescriptions que nous avons utilisées pour Γ_2.

4) Equations de groupe de renormalisation

Nous allons maintenant généraliser la remarque que nous avons faite lors du calcul des corrections à une boucle : la dépendance dans la masse arbitraire μ peut être compensée par un changement approprié des couplages m et g. Il existe une façon efficace d'exprimer cette propriété.

Nous avons calculé les fonctions de corrélation de ϕ dans la théorie

$$S = \int \mathrm{d}^{4-\varepsilon}x\frac{Z_\phi}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{Z_\phi Z_2}{2}m^2\phi^2 + \frac{Z_\phi^2 Z_4}{4!}g\ \mu^\varepsilon\phi^4$$

avec des prescriptions de renormalisation fixées.

Posant $\phi_0 = \sqrt{Z_\phi}\ \phi$, $m_0^2 = Z_2 m^2$, $g_0 = Z_n g\ \mu^\varepsilon$, on obtient

$$S = \int \mathrm{d}^{4-\varepsilon}x\frac{1}{2}\left(\nabla\phi_0\right)^2 + \frac{1}{2}m_0^2\phi_0^2 + \frac{1}{4!}g_0\phi_0^4$$

Les fonctions de corrélation de ϕ et ϕ_0 sont donc reliées de manière très simple. On note $\Gamma^{(0)}$ celles de ϕ_0 pour les distinguer des corrélations Γ de ϕ. Tant que ε est non nul, les fonctions $\Gamma^{(0)}$ sont bien définies. Le terme de source est

$$\int j\phi = \int j\ Z_\phi^{-1/2}\phi_0$$

donc les fonctions de Green vérifient

$$\Gamma_n^{(0)}\left(p_1, ..., p_n\right) = Z_\phi^{-n/2}\Gamma_n\left(p_1, ..., p_n\right)$$

Il est bon de montrer explicitement la dépendance dans les variables supplémentaires. On exprime $\Gamma^{(0)}$ en fonction de m_0 et g_0 et Γ en fonction de m, g et μ.

La forme des relations

$$m_0^2 = Z_2(m,\mu,g,\varepsilon)m^2 \qquad , \quad g_0 = Z_4(m,\mu,g,\varepsilon)g\ \mu^\varepsilon$$

où le développement de Z_2 et Z_4 en g commence par 1, permet (au moins ordre par ordre en g_0) d'exprimer m et g en fonction de m_0, g_0 et μ, ε jouant le rôle de paramètre. A m_0 et g_0 fixés, Γ_n dépend de μ explicitement mais aussi implicitement par l'intermédiaire de m et g. On définit

$$\begin{aligned}
\beta\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right) &= \mu\frac{\partial g}{\partial\mu}\\
\gamma_d\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right) &= \frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ \log\ Z_\phi}{\partial\mu}\\
\gamma_m\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right) &= \frac{1}{2}\mu\frac{\partial\ \log\ m^2}{\partial\mu}
\end{aligned}$$

Dans ces formules, on dérive par rapport à μ à m_0 et g_0 constants, puis on réexprime le résultat en fonction de m et g. Dans l'identité

$$\Gamma_n^{(0)}\left(p_1,...,p_n,m_0,g_0\right) = Z_\phi^{-n/2}\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m,\mu,g,\varepsilon\right)$$

le membre de droite est indépendant de μ, donc dérivant par rapport à μ à m_0 et g_0 fixés, on obtient

$$\begin{gathered}\left(-n\ \gamma_d\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right)+\beta\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial g}+\gamma_m\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right)m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\\ \Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m,\mu,g,\varepsilon\right)=0\end{gathered} \tag{1}$$

exprimant qu'on peut réabsorber un changement de μ par un changement de g et m.

Le point important est que Γ_n, γ_d, γ_m et β ont des limites finies lorsque ε tend vers 0. Pour Γ_n nous le supposons par construction. Nous pouvons le vérifier à une boucle pour les autres coefficients.

On obtient donc

$$\left(-n\ \gamma_d\left(g,\frac{m}{\mu}\right)+\beta\left(g,\frac{m}{\mu}\right)\frac{\partial}{\partial g}+\gamma_m\left(g,\frac{m}{\mu}\right)m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m,\mu,g\right)=0$$

D'autre part, il est facile de vérifier que Γ_n a, au sens de l'analyse dimensionnelle usuelle, une dimension $4-n+\frac{\varepsilon}{2}(n-2)$ donc

$$\Gamma_n\left(sp_1,...,sp_n,m,\mu,g\right) = s^{4-n+\frac{\varepsilon}{2}(n-2)}\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,\frac{m}{s},\frac{\mu}{s},g,\varepsilon\right)$$

Donc

$$\left(s\frac{\partial}{\partial s}+m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial\mu}\right)\Gamma_n\left(sp_1,...,sp_n,m,\mu,g,\varepsilon\right) = (4-n+\varepsilon(n-2))\Gamma_n\left(sp_1,...,sp_n,m,\mu,g,\varepsilon\right)$$

On peut maintenant utiliser ces deux équations pour éliminer $\mu\frac{\partial}{\partial\mu}$ et obtenir

$$\begin{gathered}\left[-s\frac{\partial}{\partial s}+\beta\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right)\frac{\partial}{\partial g}+\left(\gamma_m\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right)-1\right)m\frac{\partial}{\partial m}-n\gamma_d\left(g,\frac{m}{\mu},\varepsilon\right)+4-n+\varepsilon(n-2)\right]\\ \Gamma_n\left(sp_1,...,sp_n,m,\mu,g,\varepsilon\right)=0\end{gathered} \tag{2}$$

Cette équation exprime qu'un changement de l'échelle des moments peut être compensé par un changement approprié de m et g. Cette équation a des conséquences très importantes.

Il y a des circonstances où cette équation peut être résolue sans aucune difficulté. Dans la soustraction minimale, nous avons annoncé que Z_ϕ, Z_2 et Z_4 ne dépendent que de g et ε, car ce sont des quantités sans dimension indépendantes de m. On peut alors facilement se convaincre qu'il en est de même des coefficients β, γ_m, γ_d. Donc l'équation (1) devient

$$\left(-n\ \gamma_d(g,\varepsilon)+\beta(g,\varepsilon)\frac{\partial}{\partial g}+\gamma_m(g,\varepsilon)m\frac{\partial}{\partial m}+\mu\frac{\partial}{\partial \mu}\right)\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m,\mu,g,\varepsilon\right)=0$$

Cette équation se résout par la méthode des caractéristiques. On pose

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\ \gamma_m(g,\varepsilon)\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t}=\mu\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\beta(g,\varepsilon)$$

Partant de conditions initiales, ces équations définissent $g(t)$, $m(t)$ et $\mu(t)$.

Alors

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m(t),\mu(t),g(t),\varepsilon\right)=n\ \gamma_d(g(t),\varepsilon)\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m(t),\mu(t),g(t),\varepsilon\right)$$

d'où

$$(p_1,...,p_n,m(t),\mu(t),g(t),\varepsilon)=\exp\left(n\int_{t_0}^{t}\gamma_d(g(u),\varepsilon)\mathrm{d}u\right)\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m\left(t_0\right),\mu\left(t_0\right),g\left(t_0\right),\varepsilon\right)$$

On peut appliquer la même technique à l'équation (2), toujours dans la soustraction minimale.

On pose

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m\left(\gamma_m(g,\varepsilon)-1\right)\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=-s\ ,\qquad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\beta(g,\varepsilon)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}&\Gamma_n\left(\mathrm{e}^{-t}p_1,...,\mathrm{e}^{-t}p_n,m(t),\mu,g(t),\varepsilon\right)\\&\quad=\exp\left(-t\left(4-n+\frac{\varepsilon}{2}(n-2)\right)+n\int_0^t\gamma_d(g(u),\varepsilon)\mathrm{d}u\right)\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m(0),\mu,g(0),\varepsilon\right)\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}&\Gamma_n\left(\mathrm{e}^{t}p_1,...,\mathrm{e}^{t}p_n,m(0),\mu,g(0),\varepsilon\right)\\&\quad=\exp\left(t(4-n+\varepsilon(n-2))-n\int_0^t\gamma_d(g(u),\varepsilon)\mathrm{d}u\right)\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m(t),\mu,g(t),\varepsilon\right)\end{aligned}$$

On peut donc étudier de manière explicite le comportement de la théorie quand on change l'échelle des moments. Remarquons le rôle essentiel joué par les zéros de la fonction $\beta(g,\varepsilon)$. Supposons d'abord que la constante de couplage "physique" est exactement égale à g^*, un zéro de la fonction β. Alors l'équation précédente devient

$$\begin{aligned}\Gamma_n\left(\mathrm{e}^{t}p_1,...,\mathrm{e}^{t}p_n,m,\mu,g^*,\varepsilon\right)&=\exp\left(t\left(4-n+\varepsilon(n-2)-n\ \gamma_d\left(g^*,\varepsilon\right)\right)\right)\\&\qquad\Gamma_n\left(p_1,...,p_n,m(t),\mu,g^*,\varepsilon\right)\end{aligned}$$

avec

$$m(t)=m\ \exp\left(-t\left(1-\gamma_m\left(g^*,\varepsilon\right)\right)\right)$$

Si $m = 0$, la théorie est exactement invariante d'échelle. Si $m \neq 0$, mais $1 - \gamma_m(g^*, \varepsilon) > 0$ à grands moments, la masse devient négligeable et la théorie devient invariante d'échelle. Ceci reste qualitativement vrai si on ne démarre pas exactement avec $g = g^*$, mais que $g(t)$ s'en approche assez vite quand t devient grand.

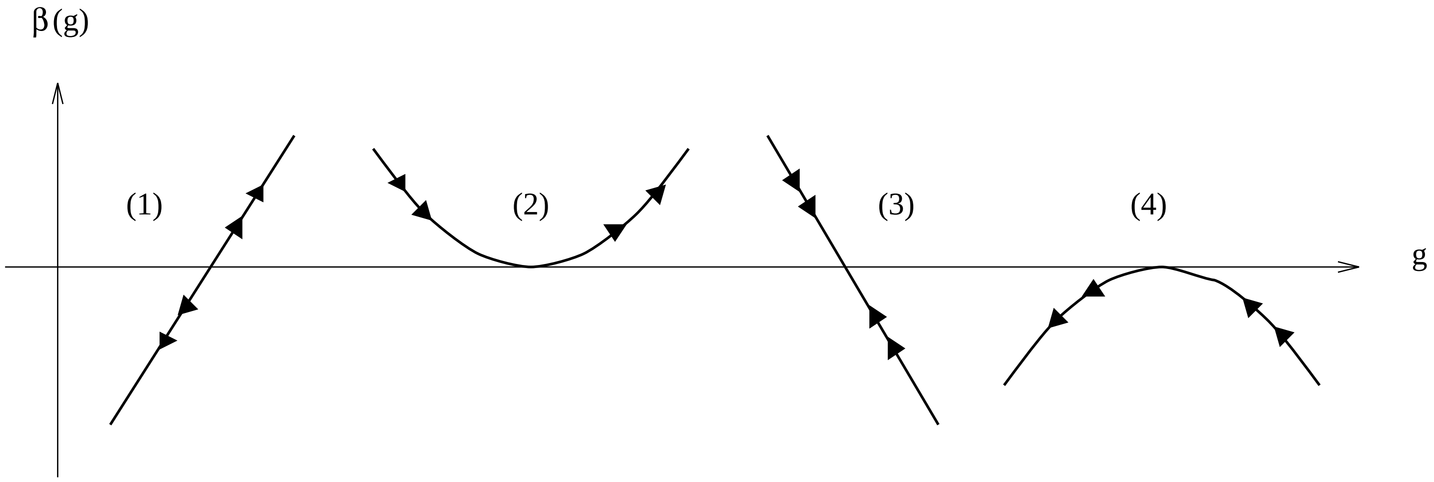
L'équation

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \beta(g, \varepsilon)$$

a pour solution dans un intervalle où $\beta(g, \varepsilon)$ ne s'annule pas

$$t - t_0 = \int_{g_0}^{g} \frac{\mathrm{d}\lambda}{\beta(\lambda, \varepsilon)}$$

Il est clair que la fonction β s'annule à $g = 0$ (c'est la théorie libre). Lorsque t tend vers l'infini, il faut que l'intégrale du second membre diverge. Plusieurs scénarios sont donc possibles. Le cas le plus intéressant se produit lorsque la fonction β a des zéros non triviaux. Soit g^* un tel zéro. Au voisinage de g^* (qu'on suppose isolé) il y a quatre comportements possibles pour $\beta(g, \varepsilon)$.



Les comportements possibles de la fonction β.

Les flèches indiquent la manière dont se comporte un point proche de g^* lorsque t augmente. Dans le cas (1), si la constante de couplage physique est proche de g^*, la théorie à grands moments est décrite par un couplage effectif qui s'éloigne de g^* lorsque les moments augmentent. Un tel zéro est donc répulsif dans l'ultraviolet et attractif dans l'infrarouge.

Le cas (3) montre la situation inverse. La constante de couplage de la théorie à grands moments a tendance à s'approcher de g^*. Si $1 - \gamma_m(\gamma^*, \varepsilon) > 0$, les conclusions qualitatives sont les mêmes que dans le cas où la constante de couplage est exactement g^*. La théorie à grande énergie se confond avec une théorie de masse nulle. Les fonctions de corrélation deviennent invariantes d'échelle dans cette limite. Ces fonctions exhibent des dimensions anormales dues à $\gamma_d(g^*, \varepsilon)$. La dimension naïve du champ ϕ était $1 - \varepsilon/2$. A cause de la renormalisation, cette dimension est corrigée, et devient $1 - \varepsilon/2 + \gamma_d(g^*, \varepsilon)$.

Pour terminer nous allons calculer $\beta(g, \varepsilon)$ à une boucle pour φ^4 de masse nulle. En général, les fonctions β et γ dépendent de la prescription de renormalisation mais on peut montrer qu'à l'ordre d'une boucle, la fonction β est indépendante de la prescription pour $\varepsilon = 0$.

On part de

$$g_0 = Z_4(g,\varepsilon) g \mu^{\varepsilon}$$

d'où en dérivant par rapport à μ

$$0 = \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \left(Z_4(g,\varepsilon) g \mu^{\varepsilon} \right)$$

soit

$$0 = \mu^{\varepsilon} \left(\varepsilon g \; Z_4(g,\varepsilon) + \beta(g,\varepsilon) \left(Z_4(g,\varepsilon) + g \frac{\partial Z_4}{\partial g}(g,\varepsilon) \right) \right)$$

d'où finalement

$$\varepsilon g + \beta(g,\varepsilon) \left(1 + g \frac{\partial \log \, Z_4}{\partial g}(g,\varepsilon) \right) = 0$$

On suppose que $\beta(g)$ est fini lorsque $\varepsilon = 0$. Mais on sait d'autre part que Z_4 a des pôles en $\varepsilon = 0$ d'ordre de plus en plus grand quand le nombre de boucles croît. Ceci impose de nombreuses relations sur les coefficients du développement de Z_4 en g. Ecrivant

$$g \frac{\partial \log \, Z_n}{\partial g} \equiv F(g,\varepsilon) = \sum_1^{\infty} g^n \varepsilon^{-n} F_n(\varepsilon) \; ,$$

$$\beta = \sum_0^{\infty} g^n \beta_n(\varepsilon)$$

où F_n et β_n sont des fonctions régulières au voisinage de 0 on peut identifier terme à terme les coefficients des puissances de g dans

$$\varepsilon g + \beta(g,\varepsilon)(1 + F(g,\varepsilon)) = 0$$

On obtient

$$\beta_0 = 0 \quad , \quad \varepsilon + \beta_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon \beta_2 + \beta_1 F_1 = 0 \quad , \quad \varepsilon^2 \beta_3 + \varepsilon \beta_2 F_1 + \beta_1 F_2 = 0 \; , \quad \text{etc...}$$

En conséquence $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = -\varepsilon$, $\beta_2 = F_1$ (relation qui prouve que $\beta_2(0)$ donc la fonction β à une boucle et $\varepsilon = 0$ est indépendante de la prescription) puis $\varepsilon \beta_3 = F_2 - F_1^2$ et cette dernière relation implique que $F_2 - F_1^2$ s'annule à $\varepsilon = 0$. Plus généralement on se convainc que toute la partie singulière de $\varepsilon^{-n} F_n$ à part le pôle simple est déterminée par les parties singulières des termes d'ordre inférieur. Ceci est particulièrement manifeste dans la prescription de soustraction minimale. En effet dans ce cas $F_n(\varepsilon)$ est un polynôme de degré au plus $n-1$ et en conséquence il est facile de vérifier que dans le développement en g de $(1 + F(g,\varepsilon))^{-1} - 1$ il n'y a pas de partie finie en ε, uniquement des pôles. Donc de l'égalité

$$\beta(g,\varepsilon) + \varepsilon g = -\varepsilon g \left(\frac{1}{1 + F(g,\varepsilon)} - 1 \right)$$

on déduit que les deux membres sont indépendants de ε. On peut donc écrire $\beta(g,\varepsilon) + \varepsilon g = g^2 h(g)$ et

$$F(g,\varepsilon) = \frac{g h(g)}{\varepsilon - g h(g)} = \sum_1^{\infty} g^n h(g)^n \varepsilon^{-n}$$

En particulier $h(g)$ code les pôles simples de Z_4 à chaque ordre en g et en conséquence la fonction $F(g,\varepsilon)$ toute entière.

A une boucle

$$Z_4(g) = 1 + \frac{3}{(4\pi)^2\varepsilon} g + O\left(g^2\right)$$

d'où

$$\beta(g) = -\varepsilon g + \frac{3}{(4\pi)^2} g^2 + O\left(g^3\right)$$

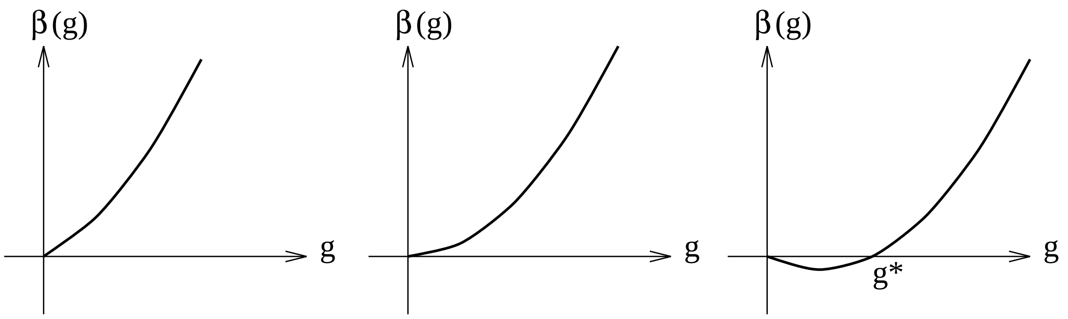
Lorsque $\varepsilon = 0$, on retrouve la relation

$$g\left(\mu'\right) = g + \frac{3g^2}{16\pi^2} \log\frac{\mu'}{\mu} + O\left(g^3\right)$$

que nous avions trouvée précédemment.

Comme par définition g est positive, on a pour $\beta(g,\varepsilon)$ au voisinage de l'origine les alternatives suivantes

$\varepsilon < 0$ (non renormalisable) $\qquad$ $\varepsilon = 0$ $\qquad$ $\varepsilon > 0$



avec $g^* = \frac{16\pi^2\varepsilon}{3}$.

Donc si $\varepsilon \leq 0$, $g = 0$ est le seul point fixe de $\beta(g)$ (à cet ordre en théorie des perturbations bien sûr).

Par contre si $\varepsilon > 0$, il apparaît un nouveau point fixe stable pour le comportement infrarouge.

Lorsque $\varepsilon = 0$, la forme de $\beta(g)$ indique que la théorie des perturbations est bonne à petits moments.

Les différents comportements de la fonction $\beta(g,\varepsilon)$ suivant que $d = 4 - \varepsilon$ est plus petite ou plus grande que 4 rappellent notre analyse des phénomènes critiques. Pour $\varepsilon < 0$ le comportement à grande distance sur le réseau au point critique est entièrement contrôlé par le point fixe infrarouge trivial (dit point fixe gaussien). Par contre, pour $\varepsilon > 0$ on peut se convaincre que le comportement à grande distance sur le réseau au point critique est entièrement contrôlé par le point fixe infrarouge non trivial. Ce résultat découle d'une analyse plus soigneuse des équations que nous avons établies dans la discussion heuristique qui clôt le Chapitre II. Les dimensions anormales sont liées aux exposants critiques. Mais ça c'est une autre histoire, qui fera l'objet de la seconde partie de ce cours.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

Pour une discussion des idées générales du groupe de renormalisation et de leur histoire, on consultera avec plaisir

"The Renormalization Group and Critical Phenomena" de K.G. Wilson. *Reviews of Modern Physics*, Vol.**55**, N°3, 1983.

Il existe à l'heure actuelle de nombreux ouvrages traitant de la théorie quantique des champs et de ses liens avec la mécanique statistique. Ils couvrent toujours un domaine beaucoup plus large que ce cours et permettront au lecteur de choisir les directions d'approfondissement qui lui conviennent le mieux. Les ouvrages suivants m'ont été particulièrement précieux :

1. Methods in Field Theory, Les Houches 1975. R. Balian and J. Zinn-Justin Editors. North Holland/World Scientific.

2. Modern Theory of Critical Phenomena. S.K. Ma, Frontiers in Physics 46. Benjamin/Cummings.

3. Quantum Field Theory. C. Itzykson and J.-B. Zuber. Mac Graw Hill.

4. Field Theory A Modern Primer. P. Ramond. Frontiers in Physics 51. Benjamin/Cummings.

5. Gauge Fields and Strings. A.M. Polyakov. Contemporary Concepts in Physics 3. Harwood.

6. Théorie Statistique des Champs, Vol.1 et 2. C. Itzykson et J.M. Drouffe. Inter Editions/Editions du C.N.R.S.

7. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. J. Zinn-Justin. Oxford.

Pour des compléments sur les marches aléatoires (I.B.) on consultera avec profit la référence (6) Vol.1 Chap.1. Pour un calcul direct des propagateurs dans le continu, voir (5) Chap.9.

L'introduction des opérateurs ψ pour résoudre le modèle d'Ising à deux dimensions s'inspire du traitement donné dans (5) Chap.10, où figurent aussi des tentatives de généralisation à trois dimensions. Pour une autre méthode de résolution du modèle d'Ising à deux dimensions, on consultera par exemple (6) Vol.1 Chap.2, qui contient également des références plus complètes.

La reformulation du modèle d'Ising par des variables continues, la discussion du champ moyen et des premières corrections s'inspire d'un cours de DEA d'E. Brézin. Une discussion assez similaire, mais plus complète, se trouve dans la contribution du même auteur à (1) et sous forme très détaillée dans (7) Chap.21 et suivants. On y trouvera aussi des arguments plus rigoureux pour justifier le lien entre la théorie φ^4 et les phénomènes critiques. Le modèle $O(n)$ dans une version sur le réseau ou dans le continu est traité dans (5), (6) et (7).

Les avantages et inconvénients de nombreuses régularisations sont discutés en détail dans (7) Chap.7, mais aussi dans tout l'ouvrage au fur à mesure des besoins. Les calculs perturbatifs explicites sont dans (3), (4), (6) et (7). L'accent dans (3) et (4) est mis sur la physique des particules élémentaires, alors que dans (6) et (7) il est mis sur la mécanique statistique. Peut être (4) est-il le plus élémentaire. La renormalisation perturbative aux premiers ordres est dans tous ces ouvrages.

Pour une preuve de la renormalisabilité de φ^4 à quatre dimensions, utilisant les équations du groupe de renormalisation, voir la contribution de C.G. Callan à (1). Une discussion voisine se trouve dans (7), Chap.8 ; d'autres chapitres contiennent l'extension de la méthode à des théories plus compliquées, en présence de symétries globales et locales.

Le livre de Ma (2) présente le lien entre théorie des champs et phénomènes critiques dans une optique assez proche des idées originales de Wilson. Il est assez élémentaire pour être lu facilement.

La référence (6) contient une introduction aux simulations numériques, mais aussi aux développements plus récents des transitions de phase à deux dimensions.